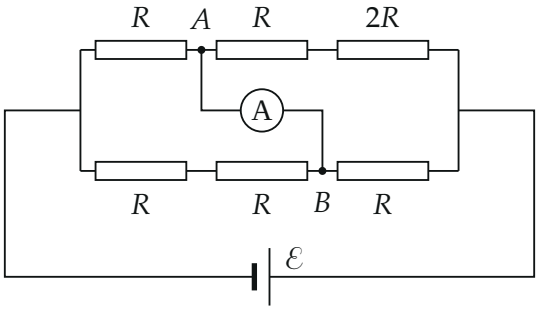
Ток через амперметр в мостовой цепи

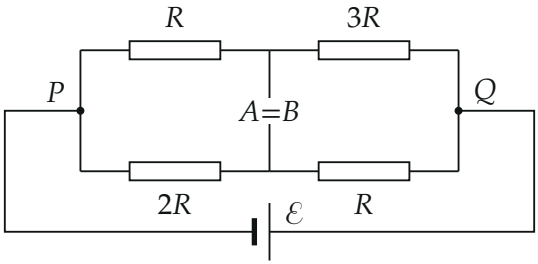
Задача 3. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 1, задача 3] В цепи, схема которой представлена на рисунке, найти ток через амперметр от A к B. ЭДС источника и величины сопротивлений известны. Внутреннее сопротивление источника равно нулю.



▲ **Решение. Что происходит.** Сопротивление амперметра равно нулю, поэтому он закорачивает точки A и B: их потенциалы равны, и их можно считать одним узлом. Тогда цепь сворачивается в два последовательных участка из параллельных пар, ток источника находится по закону Ома, а потом делится по ветвям. Ток через амперметр — по первому правилу Кирхгофа (закону сохранения заряда) для узла A. Класс задачи — цепь с идеальным амперметром: «стянуть» его в узел.

Обозначения. P — левый узел, Q — правый; длинная тонкая пластина источника (справа) — его плюс, поэтому ток во внешней цепи идёт от Q к P. I — ток источника; токи будем измерять в единицах $\dfrac{\mathcal{E}}{17R}$.

1. Эквивалентная схема. Между P и общим узлом $A = B$ — две параллельные ветви: верхний левый резистор R (от P к A) и два нижних левых $R + R = 2R$ (от P к B). Между узлом $A = B$ и Q — ветви $R + 2R = 3R$ (сверху, от A) и R (снизу, от B).



Эквивалентная схема: амперметр стянут в точку, узлы A и B слились

Сопротивления параллельных пар и всей цепи:

$$R_{PA} = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3}R, \qquad R_{AQ} = \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R,$$

$$R_{\text{общ}} = \frac{2}{3}R + \frac{3}{4}R = \frac{17}{12}R.$$

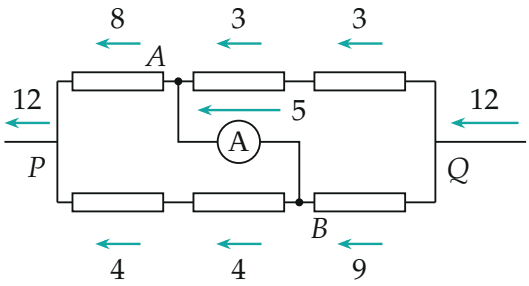
2. Ток источника. Закон Ома для полной цепи (внутреннего сопротивления нет):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{общ}}} = \frac{12\,\mathcal{E}}{17R} = 12 \cdot \frac{\mathcal{E}}{17R}.$$

3. Деление токов. В параллельных ветвях напряжение общее, поэтому токи обратно пропорциональны сопротивлениям.

Правая пара ($3R$ и R, отношение токов 1 : 3): от Q к A через $3R$ идёт $\frac{1}{4}I = 3$, от Q к B через нижний правый R — $\frac{3}{4}I = 9$.

Левая пара (R и $2R$, отношение токов 2 : 1): от A к P через верхний левый R идёт $\frac{2}{3}I = 8$, от B к P через два нижних R — $\frac{1}{3}I = 4$.



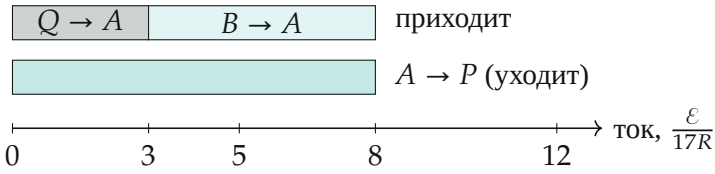
Токи в единицах $\mathcal{E}/(17R)$: в узел Q входят 12, уходят 3 и 9; через амперметр — 5 от B к A

4. Ток через амперметр. Первое правило Кирхгофа для узла A: сколько заряда приходит в узел за единицу времени, столько и уходит. В A приходит 3 (от Q), уходит 8 (к P), значит, недостающие 5 приходят через амперметр из B:

$$I_{BA} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{4}I = \frac{5}{12}I = \frac{5\,\mathcal{E}}{17R}.$$

Проверим узел B: приходит 9, уходит 4 к P и 5 к A — сходится. Ток от A к B отрицателен:

$$I_{AB} = -\frac{5\,\mathcal{E}}{17R}.$$



Баланс токов в узле A: приходит $3+5$, уходит 8

Обратите внимание: знак ответа задаёт полярность источника. Короткая толстая пластина — минус, длинная тонкая — плюс; источник плюсом справа, поэтому ток через амперметр идёт от B к A, и $I_{AB} < 0$.

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}/R$ — ток. Второй способ — через потенциалы: примем $\varphi_P = 0$, $\varphi_Q = \mathcal{E}$; потенциал общего узла $\varphi = \mathcal{E} \cdot \dfrac{R_{PA}}{R_{\text{общ}}} = \mathcal{E} \cdot \dfrac{2/3}{17/12} = \dfrac{8}{17}\mathcal{E}$. Тогда ток $A \to P$: $\dfrac{8\mathcal{E}/17}{R} = 8$; ток $Q \to A$: $\dfrac{9\mathcal{E}/17}{3R} = 3$ (в единицах $\frac{\mathcal{E}}{17R}$); разность 5 — то же.

Смысл: амперметр выравнивает потенциалы A и B, а лишний ток, который правая часть цепи подаёт в B и не может забрать левая, перетекает через амперметр в A.

Ответ. $I_{AB} = -\dfrac{5\,\mathcal{E}}{17R}$: ток $\dfrac{5\,\mathcal{E}}{17R}$ течёт через амперметр от B к A.