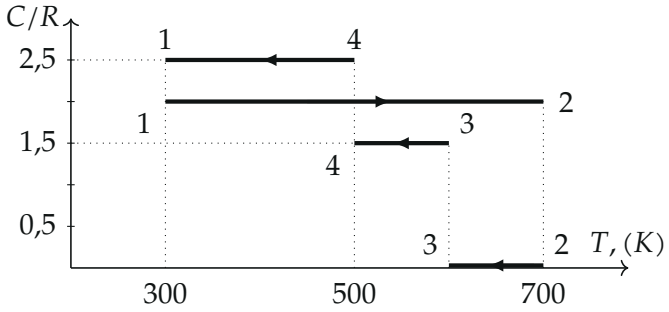
Цикл по графику теплоёмкости $C(T)$

Задача 4. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 1, задача 4] Один моль идеального одноатомного газа совершает циклический процесс 1-2-3-4-1. Дан график зависимости теплоёмкости газа (в единицах газовой постоянной R) от его абсолютной температуры в процессах 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 (стрелками показано направление изменения температуры). Найти КПД цикла. Качественно построить график зависимости давления от объёма в этом процессе.



▲ **Решение. Что происходит.** Теплоёмкость по определению — теплота на градус: $\delta Q = C\,dT$. На каждом участке C постоянна, поэтому теплота участка — $C\Delta T$, то есть площадь под графиком $C(T)$ со знаком направления. Нужны теплота от нагревателя (все участки, где $\delta Q > 0$) и отданная холодильнику; КПД — работа за цикл, делённая на полученную теплоту. По значениям C узнаём и сами процессы — это даст график $p(V)$. Класс задачи — цикл, заданный теплоёмкостями.

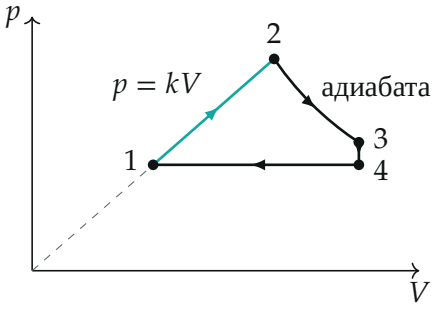
Обозначения. $Q_{ij} = C_{ij}(T_j - T_i)$ — теплота, полученная газом на участке $i \to j$; $Q_\text{н}$ — полученная от нагревателя, $Q_\text{х}$ — отданная холодильнику (модуль); $\nu = 1$ моль. По графику: $T_1 = 300$ К, $T_2 = 700$ К, $T_3 = 600$ К, $T_4 = 500$ К.

1. Что за процессы. Для одноатомного газа $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$.

- $3 \to 4$: $C = \frac{3}{2}R = C_V$ — изохора.
- $4 \to 1$: $C = \frac{5}{2}R = C_p$ — изобара.

- $2 \to 3$: $C = 0$ — теплообмена нет, адиабата.
- $1 \to 2$: $C = 2R$. Первое начало для малого шага: $C\,dT = \frac{3}{2}R\,dT + p\,dV$, то есть $p\,dV = \frac{1}{2}R\,dT$. Для процесса $p = kV$ имеем $pV = kV^2 = RT$, $R\,dT = 2kV\,dV = 2p\,dV$ — как раз $p\,dV = \frac{1}{2}R\,dT$. Значит, $1 \to 2$ — прямая $p = kV$ через начало координат.

Температура на $1 \to 2$ растёт ($T \propto V^2$) — газ расширяется; на адиабате $2 \to 3$ температура падает — газ расширяется дальше; на изохоре $3 \to 4$ давление падает; на изобаре $4 \to 1$ температура падает — газ сжимается.

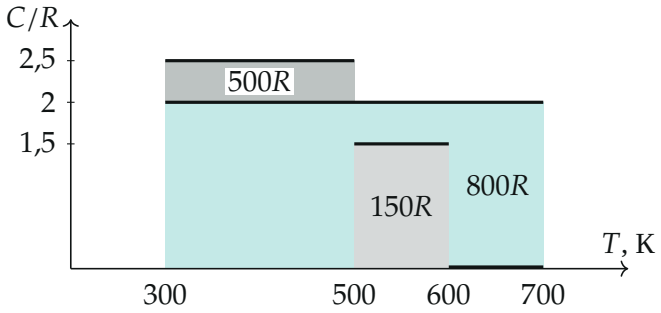


Качественный график $p(V)$: 1–2 — прямая через начало координат (нагрев), 2–3 — адиабата, 3–4 — изохора, 4–1 — изобара

2. Теплота на участках. Теплота $Q = C\Delta T$ (определение теплоёмкости, C на участке постоянна):

$$Q_{12} = 2R\,(700 - 300) = 800R,$$
$$Q_{23} = 0,$$
$$Q_{34} = \tfrac{3}{2}R\,(500 - 600) = -150R,$$
$$Q_{41} = \tfrac{5}{2}R\,(300 - 500) = -500R.$$

Знак — словами: газ получает теплоту только на $1 \to 2$, отдаёт на $3 \to 4$ и $4 \to 1$.



Теплота участка — площадь под графиком $C(T)$: бирюзовая ($1 \to 2$, газ получает $800R$); серые — отдаёт: $4 \to 1$ (полоса 300–500 K высотой 2,5, она перекрывает бирюзовую, всего $500R$) и $3 \to 4$ ($150R$)

3. Нагреватель, холодильник, работа. Полученная и отданная теплоты:

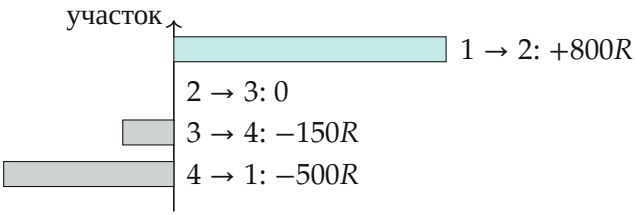
$$Q_н = Q_{12} = 800R, \qquad Q_х = |Q_{34}| + |Q_{41}| = 650R.$$

За цикл внутренняя энергия возвращается к исходной, и по первому началу работа газа равна суммарной теплоте:

$$A = Q_н - Q_х = 150R \approx 1{,}25\ \text{кДж}.$$

4. КПД.

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = 1 - \frac{Q_х}{Q_н} = 1 - \frac{650}{800} = \frac{3}{16} = 0{,}1875 \approx 19\,\%.$$



Теплота по участкам (длина полосы — в масштабе): справа — полученная, слева — отданная

Обратите внимание: на адиабате $2 \to 3$ температура падает, но газ теплоту не отдаёт — он совершает работу за счёт внутренней энергии. Поэтому в $Q_{\text{х}}$ входят только $3 \to 4$ и $4 \to 1$.

Проверка. Размерность: η — отношение теплот, безразмерно. Второй способ — работа по участкам: $A_{12} = \frac{1}{2}R \cdot 400 = 200R$, $A_{23} = -\Delta U_{23} = \frac{3}{2}R \cdot 100 = 150R$, $A_{34} = 0$, $A_{41} = R\,(300 - 500) = -200R$; сумма $150R$ — как $Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}}$. Сравнение с Карно между $T_{\max} = 700$ К и $T_{\min} = 300$ К: $\eta_{\text{К}} = 1 - \frac{3}{7} \approx 0{,}57 > 0{,}19$ — противоречия нет.

Замечание: температуры на графике условия согласованы не до конца — цикл из прямой $p = kV$, адиабаты, изохоры и изобары с ровно такими $T_1, \ldots, T_4$ не замыкается (по изобаре $V_4/V_1 = \frac{5}{3}$, по цепочке 1–2–3 получается $\approx 1{,}93$). На ответ это не влияет: КПД считается по теплотам, а они заданы графиком $C(T)$.

Смысл: из всей полученной теплоты $800R$ газ возвращает холодильнику $650R$, в работу идёт лишь $3/16$.

Ответ. $\eta = 1 - \dfrac{\frac{3}{2}(T_3 - T_4) + \frac{5}{2}(T_4 - T_1)}{2(T_2 - T_1)} = \dfrac{3}{16} \approx 0{,}19$; график $p(V)$: 1–2 — прямая через начало координат, 2–3 — адиабата, 3–4 — изохора (давление падает), 4–1 — изобара (сжатие).