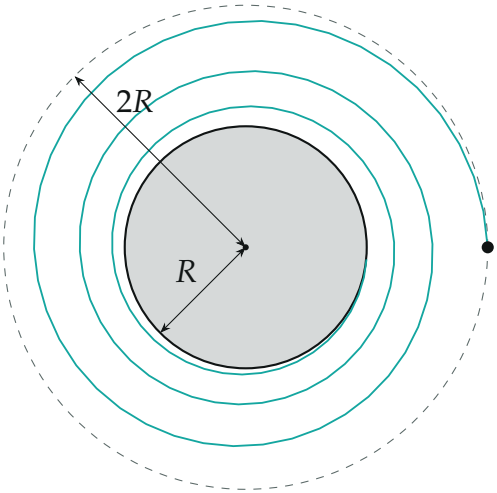
Спутник в верхних слоях атмосферы

Задача 5. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 1, задача 5] Плотность атмосферы планеты убывает с высотой по закону $\rho = \alpha/\sqrt{r}$, α — известно, r — расстояние до центра планеты. Спутник выведен на орбиту радиуса $2R$ (R — радиус планеты) с первой космической скоростью для данной орбиты. Сила сопротивления воздуха определяется соотношением $F_c = \beta\rho v^2$, где β — известно, ρ — плотность воздуха, v — скорость спутника. Считая, что сила сопротивления мала, и каждый виток орбиты мало отличается от окружности, найти, через какое время спутник упадёт на поверхность планеты.



Поясняющий рисунок: спутник стартует с круговой орбиты радиуса $2R$ и по медленно сужающейся спирали (бирюзой; число витков условное) опускается к поверхности

▲ **Решение. Что происходит.** Сопротивление воздуха забирает у спутника механическую энергию, и он медленно опускается. Сила мала, поэтому каждый виток — почти окружность, и в каждый момент спутник движется как по круговой орбите своего текущего радиуса. Главная идея: на круговой орбите полная энергия однозначно связана с радиусом, $E = -\frac{GMm}{2r}$; приравняв убыль энергии за малое время dt работе силы сопротивления, получим скорость сближения с планетой dr/dt.

При заданном законе $\rho(r)$ она оказывается постоянной, и время падения — просто путь R, делённый на эту скорость. Это задача на медленное (адиабатическое) изменение орбиты.

Обозначения. M — масса планеты, m — масса спутника, G — гравитационная постоянная, r — текущий радиус орбиты, v — скорость спутника, $u = -\dfrac{dr}{dt}$ — скорость сближения с центром планеты. Массы M и m в условии не даны — в ответ они войдут как параметры.

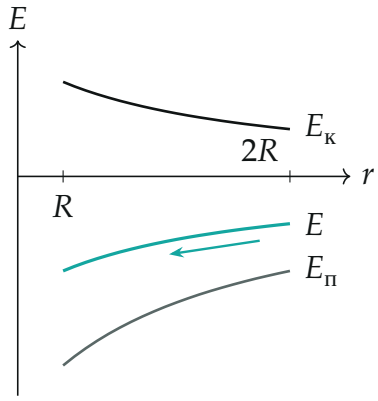
1. Скорость и энергия на круговой орбите. Второй закон Ньютона для спутника в проекции на радиус (к центру): центростремительное ускорение сообщает сила тяготения,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Кинетическая и потенциальная энергии и полная энергия:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2r}, \qquad E_п = -\frac{GMm}{r}, \qquad E = E_к + E_п = -\frac{GMm}{2r}.$$

Чем ниже орбита, тем меньше полная энергия, но тем *больше* скорость.



Энергии спутника на круговой орбите в зависимости от радиуса (по формулам пункта 1, в масштабе): когда спутник теряет энергию и опускается (стрелка), кинетическая энергия растёт

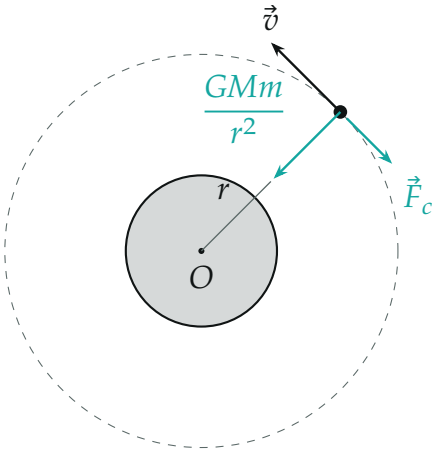
2. Энергия за малый промежуток времени. За малое время dt сила сопротивления, направленная против скорости, совершает работу $-F_c v\,dt$; сила тяготения входит в потенциальную энергию. Закон изменения механической энергии спутника:

$$dE = -F_c\, v\, dt.$$

За время dt спутник проходит малую часть витка, орбита остаётся почти круговой, поэтому $E = -\frac{GMm}{2r}$ и $dE = \frac{GMm}{2r^2}\,dr$. Отсюда

$$\frac{GMm}{2r^2}\,\frac{dr}{dt} = -\beta\rho v^3 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{dr}{dt} = \frac{2r^2\beta\rho v^3}{GMm}.$$

Знак: $dr < 0$ — спутник опускается.



Силы на спутник: тяготение к центру держит его на почти круговой орбите, малая сила сопротивления $\vec{F}_c$ направлена против скорости и уменьшает энергию

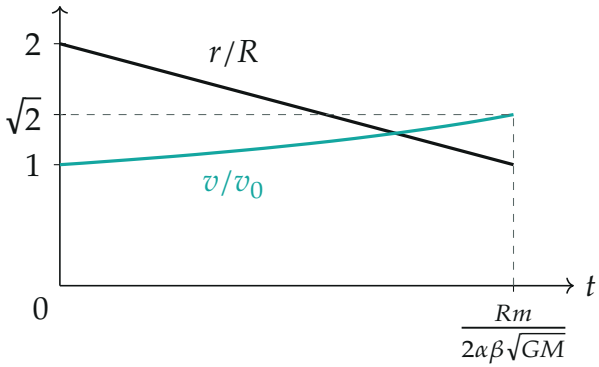
3. Подставим ρ и v. $\rho = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}$, $v^3 = \frac{(GM)^{3/2}}{r^{3/2}}$:

$$u = \frac{2r^2\beta}{GMm} \cdot \frac{\alpha}{r^{1/2}} \cdot \frac{(GM)^{3/2}}{r^{3/2}} = \frac{2\alpha\beta\sqrt{GM}}{m}.$$

Все степени r сократились: скорость сближения с планетой постоянна — от орбиты $2R$ до поверхности. Это и есть особенность закона $\rho \propto 1/\sqrt{r}$, выбранного в условии.

4. Время падения. Радиус убывает равномерно от $2R$ до R, путь по радиусу — R:

$$t = \frac{2R - R}{u} = \frac{Rm}{2\alpha\beta\sqrt{GM}}.$$



Радиус орбиты (чёрный) убывает линейно; скорость (бирюзой, $v_0 = \sqrt{GM/(2R)}$ — начальная) растёт и к поверхности достигает $\sqrt{2}\,v_0$

Обратите внимание: сила сопротивления тормозит спутник, но его скорость растёт. Противоречия нет: при опускании сила тяготения совершает положительную работу, вдвое большую по модулю, чем работа сопротивления ($dE_к = -dE$, $dE_п = 2\,dE$), так что кинетическая энергия прибавляется.

Соберём ответ. $t = \dfrac{Rm}{2\alpha\beta\sqrt{GM}}$; через ускорение свободного падения на поверхности $g = GM/R^2$ это $t = \dfrac{m\sqrt{R}}{2\alpha\beta\sqrt{g}}$.

Проверка. Размерность: $[\alpha] = \text{кг}\cdot\text{м}^{-5/2}$ (так как $\rho = \alpha/\sqrt{r}$), $[\beta] = \text{м}^2$ (так как ρv^2 — давление, а F_c — сила); тогда $[\alpha\beta\sqrt{GM}] = \text{кг}\cdot\text{м}^{-5/2}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}^{3/2}\,\text{с}^{-1} = \text{кг}\cdot\text{м/с}$, и $\dfrac{Rm}{\alpha\beta\sqrt{GM}}$ — секунды. Второй способ (за один

виток, как у организаторов): работа сопротивления за оборот $-2\pi r F_c$ меняет энергию на $\frac{GMm}{2r^2}\Delta r$, откуда $\Delta r = -\frac{4\pi r^3 \beta \rho v^2}{GMm}$, а период $T = \frac{2\pi r}{v}$; $\frac{|\Delta r|}{T} = \frac{2r^2\beta\rho v^3}{GMm}$ — то же u. Численно: прямое интегрирование уравнений движения на плоскости (тяготение плюс сопротивление, $GM = 1$, $m = 1$, $R = 1$, $\alpha\beta = 10^{-3}$) даёт время падения 499,7 при формуле 500. Предел: $\alpha\beta \to 0$ — $t \to \infty$, без атмосферы спутник летает вечно.

Смысл: в атмосфере с плотностью $\propto 1/\sqrt{r}$ спутник «тонет» с постоянной скоростью, не зависящей от высоты.

Ответ. $t = \dfrac{Rm}{2\alpha\beta\sqrt{GM}}$, где m — масса спутника, M — масса планеты.