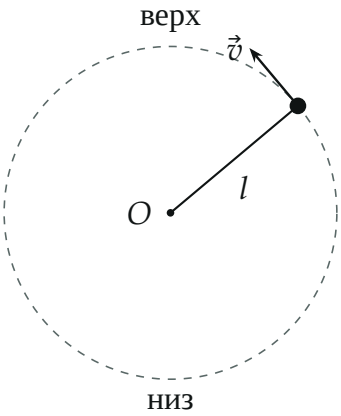
Тело на нити в вертикальной плоскости

Задача 1. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 2, задача 1] Тело на нити, второй конец которой закреплен, вращается в вертикальной плоскости. Известно, что максимальная и минимальная скорости тела отличаются в 2 раза. Найти минимальное ускорение тела. $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: тело на нити длиной l движется по окружности в вертикальной плоскости

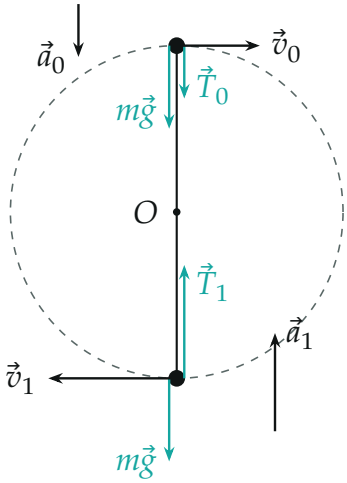
▲ **Решение. Что происходит.** Тело движется по окружности радиуса l (длина нити) с переменной скоростью: внизу оно быстрее всего, вверху — медленнее всего. Ускорение складывается из центростремительного v^2/l и касательного; вверху и внизу касательное равно нулю. Главная идея: ускорение вверху и внизу выражается через квадраты скоростей, а квадраты скоростей связаны законом сохранения энергии — так из отношения скоростей находится и само ускорение. Длина нити и скорости не даны, но они сократятся.

Обозначения. l — длина нити, v_0 — скорость в верхней точке, v_1 — в нижней, θ — угол нити от вертикали, отсчитанный от верхнего положения, a_n и a_τ — центростремительная и касательная составляющие ускорения.

1. Где скорость наибольшая и наименьшая. Натяжение нити перпендикулярно скорости и работы не совершает, работу совершает только сила тяжести. Закон сохранения механической энергии тела между верхней точкой и точкой с углом θ (тело опустилось на $l(1-\cos\theta)$):

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgl(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2gl(1-\cos\theta).$$

v^2 растёт с $1-\cos\theta$: скорость минимальна в верхней точке ($\theta = 0$) и максимальна в нижней ($\theta = \pi$). По условию $v_1 = 2v_0$.



Верхняя и нижняя точки: силы (бирюзой), скорости и ускорения; ускорения направлены к центру O, касательных составляющих нет

2. Ускорение вверху и внизу. В верхней и нижней точках сила тяжести и натяжение вертикальны, то есть направлены по радиусу; касательной силы нет, и $a_\tau = 0$. Ускорение — чисто центростремительное:

$$a_0 = \frac{v_0^2}{l}, \qquad a_1 = \frac{v_1^2}{l} = \frac{4v_0^2}{l} = 4a_0.$$

3. Связь через энергию. Закон сохранения энергии между верхней и

нижней точками (перепад высот $2l$):

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + 2mgl \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1^2}{l} - \frac{v_0^2}{l} = 4g \quad \Rightarrow \quad a_1 - a_0 = 4g.$$

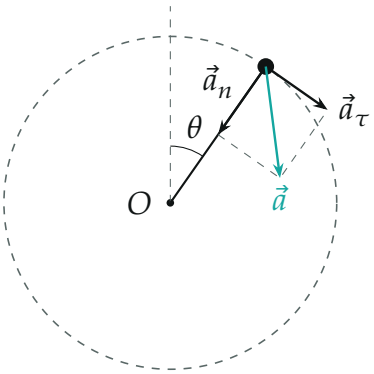
Подставим $a_1 = 4a_0$: $3a_0 = 4g$, откуда

$$a_0 = \frac{4}{3}g.$$

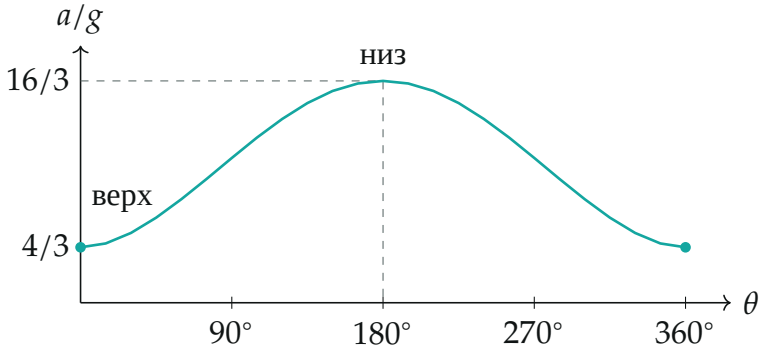
4. Почему это минимум ускорения за весь оборот. В произвольной точке ускорение имеет две составляющие:

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{v_0^2}{l} + 2g(1 - \cos\theta), \qquad a_\tau = g\sin\theta,$$
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \geq a_n \geq \frac{v_0^2}{l} = a_0.$$

Равенство — только при $\theta = 0$. Значит, ускорение минимально именно в верхней точке, а не где-то сбоку.



Произвольная точка: к центростремительному ускорению $\vec{a}_n$ добавляется касательное $\vec{a}_\tau$, поэтому $a \geq a_n$



Модуль ускорения за оборот (в единицах g), посчитан по формулам пункта 4 при $v_0^2 = \frac{4}{3}gl$: минимум $\frac{4}{3}g$ вверху, максимум $\frac{16}{3}g$ внизу

Обратите внимание: в нижней точке ускорение максимально, а не минимально, хотя нить там натянута сильнее всего; минимум — вверху, где скорость меньше.

Соберём ответ. $a_{\min} = \dfrac{4}{3}g = \dfrac{4}{3}\cdot 10 \approx 13{,}3$ м/с^2.

Проверка. Размерность: $\frac{4}{3}g$ — ускорение. Второй способ: из $a_1 - a_0 = 4g$ и $a_1 = 4a_0$ получаем $a_1 = \frac{16}{3}g$; тогда $v_1^2 - v_0^2 = (a_1 - a_0)l = 4gl$ — ровно столько даёт падение с высоты $2l$. Предел: если бы скорости отличались в k раз, $a_0 = 4g/(k^2-1)$; при $k \to \infty$ (вверху тело почти останавливается) $a_0 \to 0$ — но тогда нить вверху провисла бы, и такое движение невозможно. Здесь $a_0 = \frac{4}{3}g > g$: в верхней точке нить натянута, $T_0 = m(a_0 - g) = \frac{1}{3}mg > 0$, движение по окружности действительно идёт.

Смысл: заданное отношение скоростей однозначно задаёт запас скорости вверху, а значит — и центростремительное ускорение там.

Ответ. $a_{\min} = \dfrac{4}{3}g \approx 13{,}3$ м/с^2 (в верхней точке).