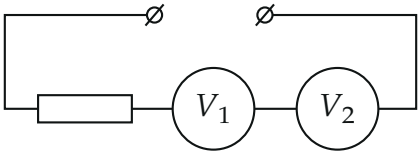
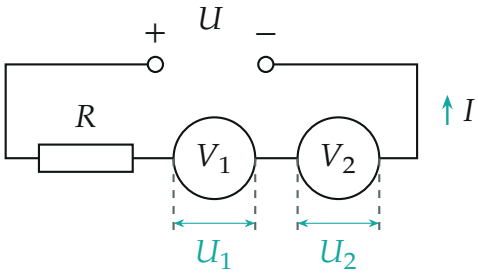
Резистор и два вольтметра

Задача 2. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 2, задача 2] Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных резистора и двух вольтметров. Цепь подключают к источнику постоянного напряжения. При этом вольтметр V_1 показывает некоторое напряжение U_1, а вольтметр V_2 — напряжение $U_2 = 3U_1/2$. Если последовательно соединенные вольтметры подключить к источнику без резистора, то вольтметр V_1 покажет напряжение $U_1' = 18$ В. Чему равно напряжение источника?



▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр — это просто резистор (своё сопротивление r), который показывает напряжение на самом себе. В последовательной цепи ток через все элементы один, поэтому показания вольтметров относятся как их сопротивления — и это отношение не зависит от того, есть ли в цепи резистор. Главная идея: из первого опыта узнаём отношение сопротивлений вольтметров, а во втором опыте вольтметры вдвоём делят всё напряжение источника. Сопротивление резистора не понадобится.

Обозначения. U — напряжение источника, r_1 и r_2 — сопротивления вольтметров, R — сопротивление резистора, I и I' — ток в первом и во втором опыте, U_2' — показание второго вольтметра во втором опыте. Вольтметры, вообще говоря, разные: $r_1 \neq r_2$.

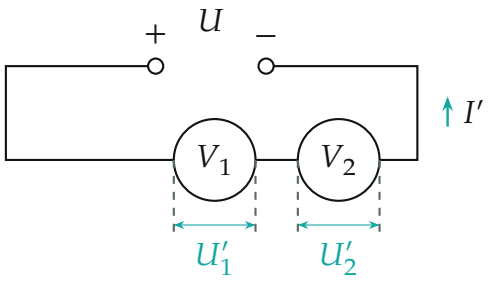


Первый опыт: резистор и два вольтметра последовательно, ток I один на всех; каждый вольтметр показывает напряжение на себе

1. Первый опыт: отношение сопротивлений. Закон Ома для участка цепи, каждого вольтметра отдельно, при одном и том же токе I:

$$U_1 = Ir_1, \qquad U_2 = Ir_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{3}{2}.$$

Ток $I = U/(R + r_1 + r_2)$ и само U_1 зависят от R, но их отношение — нет: ток сокращается.



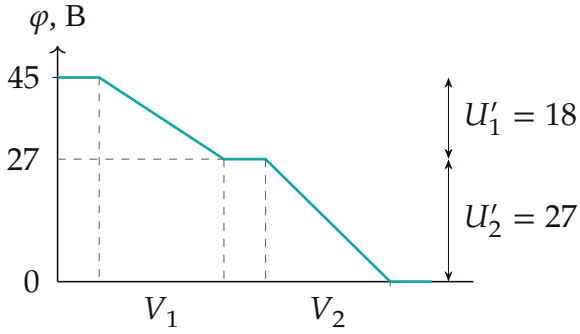
Второй опыт: резистора нет, вольтметры делят всё напряжение источника

2. Второй опыт: показание второго вольтметра. Снова ток I' общий, закон Ома для каждого вольтметра:

$$U_1' = I'r_1, \qquad U_2' = I'r_2 \quad \Rightarrow \quad U_2' = \frac{r_2}{r_1}U_1' = \frac{3}{2}\cdot 18 = 27 \text{ В}.$$

3. Напряжение источника. Других элементов в цепи нет, поэтому по второму правилу Кирхгофа (сумма напряжений на последовательных участках равна напряжению источника)

$$U = U_1' + U_2' = U_1'\left(1 + \frac{U_2}{U_1}\right) = \frac{5}{2}U_1' = 45 \text{ В}.$$



Потенциал вдоль цепи во втором опыте (от плюса источника к минусу): напряжение 45 В делится между вольтметрами в отношении $r_1 : r_2 = 2 : 3$

Обратите внимание: вольтметры здесь неодинаковые — их показания при одном токе разные, значит, разные и сопротивления. Именно отношение $r_2/r_1 = 3/2$ переносится из первого опыта во второй.

Соберём ответ. $U = U_1' \left(1 + \dfrac{U_2}{U_1}\right) = \dfrac{5}{2} \cdot 18 = 45$ В.

Проверка. Размерность: вольты. Второй способ — через доли: во втором опыте на V_1 приходится доля $\frac{r_1}{r_1+r_2} = \frac{2}{5}$ напряжения источника, $\frac{2}{5}U = 18$ В, $U = 45$ В. Согласованность с первым опытом: там вольтметры вместе показывают $\frac{5}{2}U_1 < U$, остальное падает на резисторе; значит, $U_1 < 18$ В — с резистором вольтметр V_1 показывает меньше, как и должно быть.

Смысл: последовательные вольтметры — делитель напряжения; резистор меняет ток, но не пропорцию, в которой вольтметры делят напряжение между собой.

Ответ. $U = \dfrac{5}{2} U_1' = 45$ В.