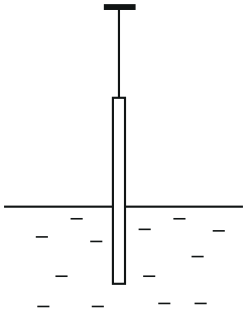
Стержень на нити погружают в воду

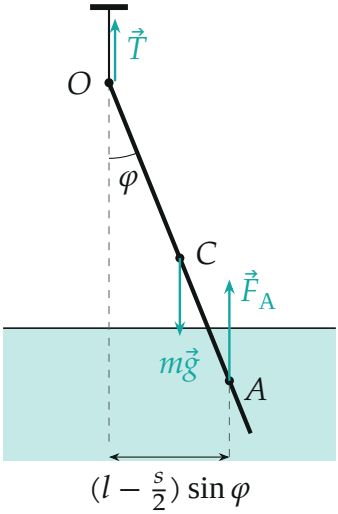
Задача 4. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 2, задача 4] Тонкий стержень длиной l подвешен на нити за один из своих концов. Стержень медленно погружают в воду, опуская точку подвеса. На какую максимальную глубину нижний конец стержня погрузится в воду? Плотность материала стержня в два раза меньше плотности воды.



▲ **Решение. Что происходит.** Пока погружена малая часть стержня, он висит вертикально: сила Архимеда мала, и сила тяжести возвращает стержень к вертикали при любом отклонении. С погружением сила Архимеда растёт, и при некоторой глубине её момент относительно точки подвеса сравнивается с моментом силы тяжести — вертикальное положение теряет устойчивость, стержень наклоняется. Дальше нижний конец только поднимается. Это задача на устойчивость равновесия: ищем границу, на которой возвращающий момент при малом отклонении обращается в ноль. Главная идея — погружённая длина в наклонном равновесии та же, что на границе, а глубина конца — это её проекция на вертикаль, она меньше.

Обозначения. ρ — плотность стержня, $\rho_0 = 2\rho$ — плотность воды, S — сечение стержня, s — длина погружённой части, O — верхний конец (за него держит нить), C — середина стержня, A — середина погружённой части, φ — угол стержня с вертикалью, H — высота точки O над водой, d — глубина нижнего конца.

1. Силы и их моменты. На стержень действуют сила тяжести $mg = \rho Slg$ в точке C, сила Архимеда $F_\text{A} = \rho_0 Ssg$ в точке A (центр погружённого объёма) и натяжение нити в точке O. В равновесии все силы вертикальны, нить вертикальна. Моменты возьмём относительно точки O: тогда натяжение нити, которое мы не знаем, выпадает — у него нулевое плечо.



Стержень отклонили на малый угол φ: сила тяжести (в середине C) поворачивает его обратно, сила Архимеда (в середине A погружённой части) — дальше от вертикали

При отклонении на угол φ плечи сил — горизонтальные расстояния от O до линий действия:

$$M_{mg} = \rho Slg \cdot \frac{l}{2}\sin\varphi \qquad \text{(к вертикали)},$$
$$M_\text{A} = \rho_0 Ssg\left(l - \frac{s}{2}\right)\sin\varphi \quad \text{(от вертикали)}.$$

2. Граница устойчивости. Вертикальное положение устойчиво, пока при малом отклонении возвращающий момент больше: $M_{mg} > M_\text{A}$, то есть

$$\rho\frac{l^2}{2} > \rho_0 s\left(l - \frac{s}{2}\right).$$

Правая часть растёт с s (при $s < l$), поэтому неравенство выполняется для малых погружений и нарушается, когда s достигает корня уравнения

$$\rho_0 s\left(l - \frac{s}{2}\right) = \rho\frac{l^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad s^2 - 2ls + \frac{\rho}{\rho_0}l^2 = 0.$$

Нам нужен корень, меньший l:

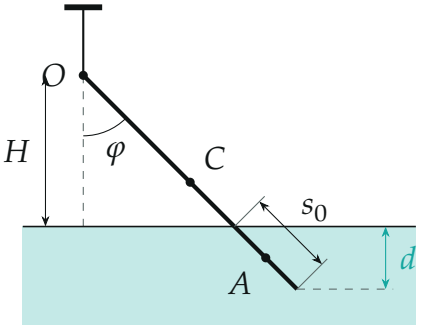
$$s_0 = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}\right) = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}29\,l.$$

Обратите внимание: сократился угол φ — условие равенства моментов от угла не зависит. Значит, и в наклонном положении равновесие возможно только при той же погружённой длине s_0.

3. Что происходит дальше. Опускаем точку подвеса ниже. Стержень наклоняется так, чтобы погружённая длина оставалась равной s_0; верхний конец O находится на высоте H над водой, и из геометрии $(l - s_0)\cos\varphi = H$. Глубина нижнего конца — проекция погружённой части на вертикаль:

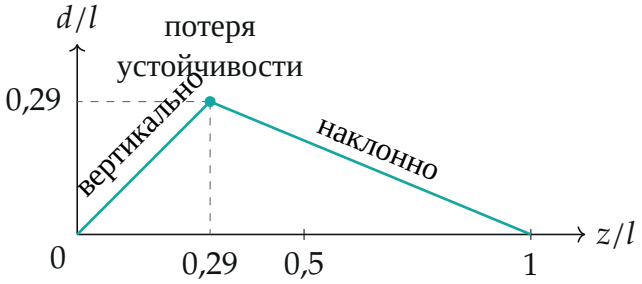
$$d = s_0\cos\varphi = \frac{s_0}{l - s_0}H < s_0.$$

Наклонное равновесие устойчиво: если угол чуть увеличится, при той же высоте H из воды выйдет часть стержня, s станет меньше s_0, момент силы тяжести перевесит и вернёт стержень.



Наклонное равновесие (здесь $H = l/2$, $\varphi = 45°$): в воде та же длина s_0, но нижний конец уже на глубине $d = s_0\cos\varphi < s_0$

4. Глубина нижнего конца за всё погружение. Пусть z — насколько опустилась точка подвеса от момента, когда стержень коснулся воды. Пока стержень вертикален ($z \le s_0$), $d = z$; затем $H = l - z$ и $d = \frac{s_0}{l - s_0}(l - z) \approx 0{,}41(l - z)$ — глубина убывает линейно до нуля, когда верхний конец доходит до воды и стержень ложится на поверхность. Наибольшая глубина — в момент потери устойчивости, $d_{\max} = s_0$.



Глубина нижнего конца в зависимости от того, насколько опущена точка подвеса: рост, пока стержень вертикален, и линейный спад после потери устойчивости

Соберём ответ.

$$d_{\max} = s_0 = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}\right) = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\, l \approx 0{,}29\, l.$$

Проверка. Размерность: длина. Пределы: при $\rho \to 0$ (стержень очень лёгкий) $s_0 \to \frac{\rho}{2\rho_0} l \to 0$ — такой стержень опрокидывается почти сразу; при $\rho \to \rho_0$ $s_0 \to l$ — стержень плотности воды можно погрузить целиком вертикально. Подстановка: при $s = 0{,}293\, l$ правая часть $2\rho \cdot 0{,}293 \cdot (1 - 0{,}146)\, l^2 = 0{,}500\, \rho l^2$ — равна левой $\rho l^2/2$.

Смысл: стержень сам «выбирает», сколько себя держать под водой, — ровно столько, чтобы моменты сил были равны; дальше опускать точку подвеса значит просто сильнее наклонять стержень.

Ответ. $d_{\max} = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\, l \approx 0{,}29\, l.$