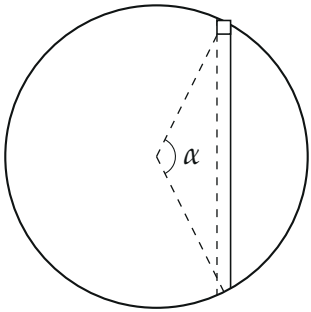
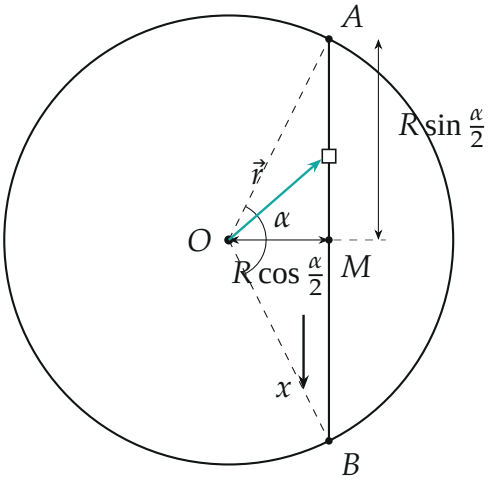
Шахта по хорде планеты

Задача 5. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 2, задача 5] По хорде некоторой планеты сделана шахта, составляющая угол α с радиусами, проведенными в её начало и конец. В шахту опускают тело. Коэффициент трения между телом и стенками шахты k. Через какое минимальное время тело окажется в точке шахты, находящейся на ближайшем расстоянии к центру планеты? Ускорение свободного падения на поверхности планеты — g, радиус планеты — R.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Планету считаем однородным шаром. Внутри него сила тяготения направлена к центру и пропорциональна расстоянию до центра: $F = mgr/R$. Её составляющая вдоль шахты пропорциональна расстоянию до середины хорды — как сила пружины, а поперечная составляющая одна и та же во всех точках хорды. Поэтому сила трения постоянна, пока тело движется в одну сторону, и движение — гармонические колебания со сдвинутым положением равновесия, как у груза на вертикальной пружине. Ближайшая к центру точка шахты — середина хорды; ищем момент, когда тело впервые в неё придёт.

Обозначения. O — центр планеты, A и B — концы шахты, M — середина хорды, $\vec{r}$ — радиус-вектор тела из O, ось x — вдоль шахты от A к B с началом в M. Из треугольника OMA: $OM = R\cos\frac{\alpha}{2}$, $MA = R\sin\frac{\alpha}{2}$; тело стартует из точки A, $x_0 = -R\sin\frac{\alpha}{2}$, без скорости. $\omega = \sqrt{g/R}$.



Геометрия шахты: середина хорды M — ближайшая к центру точка; ось x вдоль шахты, начало в M

1. Сила тяготения внутри планеты. Слои снаружи от тела (шаровой слой) на него не действуют, притягивает только шар радиуса r с массой $M(r) = M\,r^3/R^3$. Закон всемирного тяготения:

$$F = \frac{GmM(r)}{r^2} = \frac{GMm}{R^3}\,r = mg\,\frac{r}{R},$$

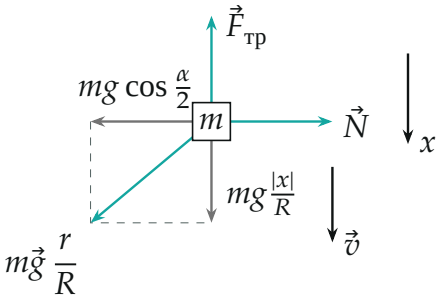
где $g = GM/R^2$. Векторно $\vec{F} = -\dfrac{mg}{R}\,\vec{r}$.

2. Силы на тело и их проекции. На тело действуют тяготение $\vec{F}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ стенки (поперёк шахты) и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (вдоль шахты, против скорости). Второй закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}+\vec{N}+\vec{F}_{\text{тр}}$. Ускорение направлено вдоль шахты, поэтому оси выберем вдоль и поперёк неё. Вектор $\vec{r}$ раскладывается на $\overrightarrow{OM}$ (поперёк, длина $R\cos\frac{\alpha}{2}$) и x вдоль шахты. Проекции:

$$\text{поперёк:}\quad 0 = N - mg\,\frac{R\cos\frac{\alpha}{2}}{R} \;\Rightarrow\; N = mg\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\text{вдоль } x:\quad m\ddot{x} = -mg\,\frac{x}{R} - F_{\text{тр}}, \qquad F_{\text{тр}} = kN = kmg\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Поперечная составляющая тяготения от положения тела не зависит — значит, и N, и сила трения скольжения постоянны. Знак трения записан для движения в сторону $+x$ (от A к B), именно так тело и движется до середины.



Тело m в шахте выше середины, движется вниз: тяготение к центру (бирюзой) раскладывается на составляющую вдоль шахты (к M) и постоянную поперечную $mg\cos\frac{\alpha}{2}$, которую уравновешивает $\vec{N}$; трение — против скорости

3. Тронется ли тело. В точке A составляющая тяготения вдоль шахты $mg\sin\frac{\alpha}{2}$, наибольшая сила трения покоя $kmg\cos\frac{\alpha}{2}$. Тело поедет, только если

$$\sin\tfrac{\alpha}{2} > k\cos\tfrac{\alpha}{2} \quad\Leftrightarrow\quad k < \operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}.$$

4. Закон движения. Перепишем уравнение пункта 2:

$$\ddot{x} = -\omega^2\left(x + kR\cos\tfrac{\alpha}{2}\right), \qquad \omega^2 = \frac{g}{R}.$$

Это уравнение гармонических колебаний около сдвинутого положения равновесия $x_{\text{р}} = -kR\cos\frac{\alpha}{2}$ (выше середины). Решение с нулевой начальной скоростью и $x(0) = -R\sin\frac{\alpha}{2}$:

$$x(t) = x_{\text{р}} - \mathcal{A}\cos\omega t, \qquad \mathcal{A} = R\left(\sin\tfrac{\alpha}{2} - k\cos\tfrac{\alpha}{2}\right) > 0.$$

Формула верна, пока скорость не меняет знак, то есть на первой половине колебания $0 \le \omega t \le \pi$; в верхней точке размаха тело останавливается в точке $x_{\text{р}} + \mathcal{A}$.

5. Дойдёт ли до середины. Наибольшая координата $x_\text{р} + \mathcal{A} = R\left(\sin\frac{\alpha}{2} - 2k\cos\frac{\alpha}{2}\right)$; середина $x = 0$ достижима при

$$\sin\tfrac{\alpha}{2} \geq 2k\cos\tfrac{\alpha}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k \leq \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}.$$

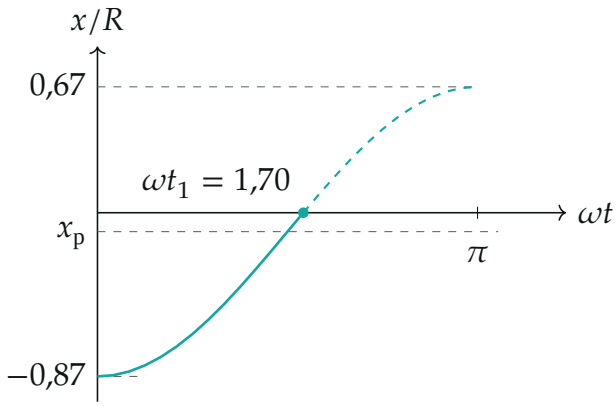
Это условие сильнее условия пункта 3. При $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < k < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ тело останавливается, не доехав до середины, и дальше стоит: в точке остановки составляющая тяготения вдоль шахты $mgR(\sin\frac{\alpha}{2} - 2k\cos\frac{\alpha}{2})/R$ меньше $kmg\cos\frac{\alpha}{2}$.

6. Время до середины. Приравняем $x(t_1) = 0$ в первой половине колебания:

$$\cos\omega t_1 = \frac{x_\text{р}}{\mathcal{A}} = -\frac{k\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} - k\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\left(-\frac{k\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} - k\cos\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Арккосинус берём из $[0;\pi]$ — это и есть первое (минимальное) время.



Пример: $\alpha = 120°$, $k = 0{,}2$ (посчитано по формуле пункта 4). Тело стартует из $x = -0{,}87R$, колеблется около $x_p = -0{,}1R$ и проходит середину при $\omega t_1 = 1{,}70$, то есть позже четверти периода

Обратите внимание: из-за трения центр колебаний сдвинут выше середины, поэтому тело приходит в M не через четверть периода $\frac{\pi}{2}\sqrt{R/g}$,

как без трения, а позже — уже на «второй четверти» колебания, когда оно тормозит.

Соберём ответ. При $k \le \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$t_1 = \sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\left(-\frac{k\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} - k\cos\frac{\alpha}{2}}\right) = \sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\frac{k}{k - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}};$$

при больших k тело в середину шахты не попадает.

Проверка. Размерность: $\sqrt{R/g}$ — время, аргумент арккосинуса безразмерный. Предел $k = 0$: $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{R/g}$ — четверть периода колебаний в шахте, который не зависит от хорды (известный результат для «гравитационного поезда»). Предел $k = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$: аргумент равен -1, $t_1 = \pi\sqrt{R/g}$ — тело доходит до середины с нулевой скоростью в конце полуколебания, как и должно быть на границе. Численно (пример на графике): прямое интегрирование уравнения пункта 2 методом малых шагов даёт $\omega t_1 = 1{,}7017$, как и формула.

Смысл: трение не меняет частоту колебаний, а только сдвигает центр, около которого тело колеблется; всё время задаёт один угол на круге фаз.

Ответ. $t_1 = \sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\left(-\frac{k\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2) - k\cos(\alpha/2)}\right)$ при $k \le \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; при большем k тело до середины шахты не доходит (при $k \ge \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ вовсе не трогается).