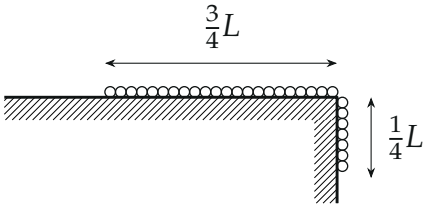
Цепочка на краю стола

Задача 1. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 3, задача 1] На краю стола на грани соскальзывания лежит цепочка с мелкими звеньями, при этом со стола свешивается четвертая часть цепочки. Найти коэффициент трения между цепочкой и столом.



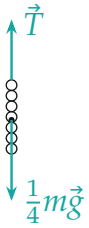
Поясняющий рисунок: цепочка длиной L, три четверти лежат на столе, четверть свешивается

▲ **Решение. Что происходит.** Свисающая часть тянет цепочку вниз своим весом, а лежащую на столе часть держит сила трения покоя. «На грани соскальзывания» значит, что трение покоя достигло наибольшего значения kN — ещё чуть-чуть, и цепочка поедет. Это задача на равновесие на пороге скольжения: пишем условия равновесия двух частей цепочки, которые связаны силой натяжения на краю стола. Звенья мелкие, поэтому перегиб на краю не мешает: натяжение просто передаётся через край.

Обозначения. m — масса цепочки, L — её длина, k — коэффициент трения, T — сила натяжения цепочки у края стола. Масса распределена по длине равномерно: на столе $\frac{3}{4}m$, свешивается $\frac{1}{4}m$.

1. Свисающая часть. На неё действуют сила тяжести $\frac{1}{4}m\vec{g}$ вниз и натяжение $\vec{T}$ со стороны остальной цепочки вверх (у края). Цепочка покоится, поэтому по второму закону Ньютона в проекции на вертикальную ось

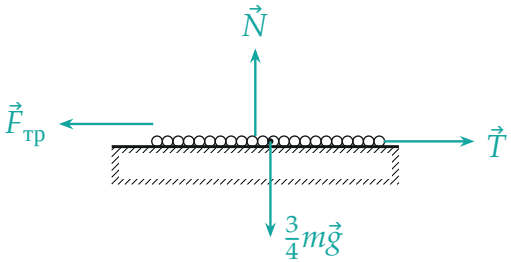
$$T - \frac{1}{4}mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{4}mg.$$



Свисающая часть: вес вниз, натяжение у края вверх

2. Часть на столе. На неё действуют сила тяжести $\frac{3}{4}m\vec{g}$, сила нормальной реакции стола $\vec{N}$, натяжение $\vec{T}$ у края (к краю; ребро стола только поворачивает цепочку, трением о ребро пренебрегаем, поэтому натяжение по обе стороны перегиба одно и то же) и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ от края. Второй закон Ньютона в проекциях на вертикаль и на горизонталь:

$$N = \frac{3}{4}mg, \qquad F_{\text{тр}} = T.$$



Часть на столе: натяжение тянет к краю, трение покоя — от края, вес уравновешен реакцией стола

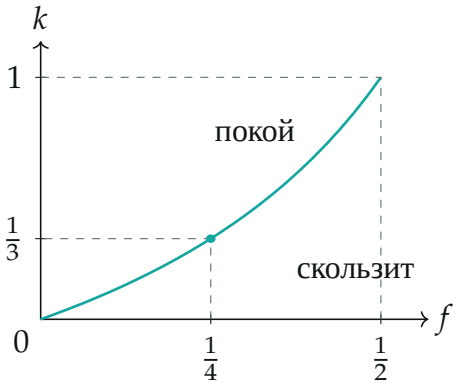
3. Порог скольжения. На грани соскальзывания трение покоя максимально: $F_{\text{тр}} = kN$. Подставим:

$$k \cdot \frac{3}{4}mg = \frac{1}{4}mg \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3}.$$

4. Второй способ — цепочка целиком. Натяжение — внутренняя сила цепочки, в баланс для всей цепочки она не входит. Вдоль цепочки её

тянет к соскальзыванию вес свисающей части $\frac{1}{4}mg$, удерживает — наибольшее трение покоя $k \cdot \frac{3}{4}mg$; на пороге они равны — то же уравнение. В общем виде, если свешивается доля f длины,

$$k(1-f)mg = fmg \quad \Rightarrow \quad k = \frac{f}{1-f}.$$



Наибольшая доля свисающей цепочки, при которой она ещё лежит, задаёт $k = f/(1-f)$; выше кривой — покой, ниже — цепочка соскальзывает. Точка — условие задачи

Обратите внимание: трение действует только на лежащую часть, поэтому в N входит масса $\frac{3}{4}m$, а не вся масса цепочки.

Соберём ответ. $k = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}$.

Проверка. Ответ безразмерный, как и должно быть у коэффициента трения. Пределы формулы $k = f/(1-f)$: при $f \to 0$ (почти ничего не свисает) $k \to 0$ — даже гладкий стол удержит; при $f = \frac{1}{2}$ нужно $k = 1$; при $f \to 1$ $k \to \infty$ — почти целиком свисающую цепочку стол не удержит ни при каком трении. Масса цепочки и её длина сократились — ответ зависит только от доли свисающей части.

Смысл: коэффициент трения — это отношение «тянущего» веса к «прижимающему»; здесь они относятся как $1:3$.

Ответ. $k = \dfrac{1}{3}$.