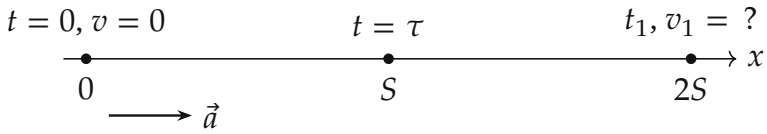
Равноускоренное движение из покоя

Задача 2. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 3, задача 2] Двигаясь равноускоренно из состояния покоя, тело прошло расстояние S за время τ. Какую скорость будет иметь тело в тот момент, когда оно пройдёт вдвое большее расстояние?



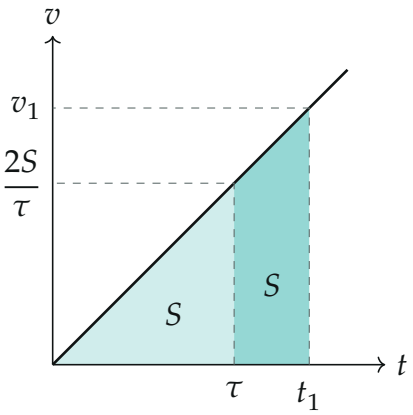
Поясняющий рисунок: тело стартует из покоя в точке 0, проходит S за время τ; ищем скорость в точке $2S$

▲ **Решение. Что происходит.** Тело разгоняется с постоянным ускорением из покоя. Первый участок задаёт ускорение через S и τ, а скорость в точке $2S$ удобнее всего найти формулой, связывающей скорость и пройденный путь без времени. Главная идея: при разгоне из покоя v^2 пропорционально пройденному пути, поэтому на вдвое большем пути скорость больше в $\sqrt{2}$ раз.

Обозначения. Ось x — вдоль движения, начало — в точке старта, a — ускорение, t_1 — момент, когда пройдено $2S$, v_1 — скорость в этот момент.

1. Ускорение. Закон равноускоренного движения из покоя, $x(t) = \dfrac{at^2}{2}$, для момента τ:

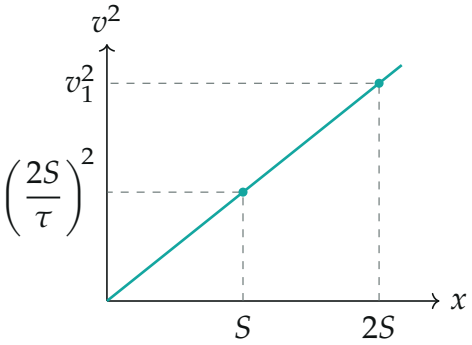
$$S = \frac{a\tau^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2S}{\tau^2}.$$



Скорость от времени: путь — площадь под графиком. Светлый треугольник — первый путь S, тёмная трапеция — второй путь S; общая площадь $2S$

2. Скорость через путь. Для равноускоренного движения из покоя $v^2 = 2ax$ (это следует из $v = at$ и $x = \frac{at^2}{2}$ исключением времени). Для точки $x = 2S$:

$$v_1^2 = 2a \cdot 2S = 4 \cdot \frac{2S}{\tau^2} \cdot S = \frac{8S^2}{\tau^2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2\sqrt{2}\,S}{\tau}.$$

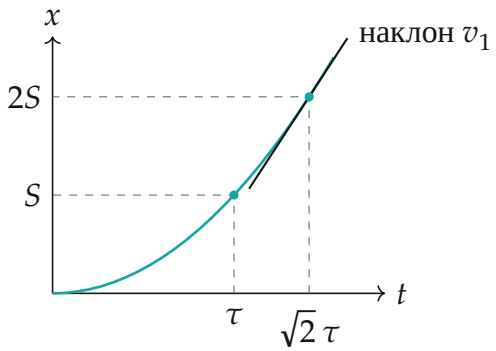


Квадрат скорости от пройденного пути — прямая $v^2 = 2ax$: вдвое больший путь — вдвое больший v^2

3. Второй способ — через время. Тот же закон $x = \frac{at^2}{2}$ для пути $2S$ и скорость $v = at$:

$$2S = \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{4S}{a}} = \sqrt{2}\,\tau, \qquad v_1 = at_1 = \frac{2S}{\tau^2}\cdot\sqrt{2}\,\tau = \frac{2\sqrt{2}\,S}{\tau}.$$

Путь вырос вдвое, а время — только в $\sqrt{2}$ раз: путь растёт как квадрат времени.



Координата от времени — парабола $x = \frac{at^2}{2}$; скорость в момент $\sqrt{2}\,\tau$ — наклон касательной в этой точке

Обратите внимание: на втором отрезке S тело едет быстрее, поэтому проходит его быстрее, чем первый: за $(\sqrt{2}-1)\tau \approx 0{,}41\tau$ вместо τ.

Соберём ответ. $v_1 = \sqrt{2a\cdot 2S} = \frac{2\sqrt{2}\,S}{\tau} \approx 2{,}83\,\frac{S}{\tau}$.

Проверка. Размерность: S/τ — скорость. Сверка с первым участком: в момент τ скорость $a\tau = \frac{2S}{\tau}$, а v_1 больше её ровно в $\sqrt{2}$ раз, как и требует $v^2 \propto x$. Площадь под графиком $v(t)$ до $t_1 = \sqrt{2}\tau$: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\tau\cdot\frac{2\sqrt{2}S}{\tau} = 2S$ — верно.

Смысл: при разгоне из покоя скорость растёт как корень из пройденного пути.

Ответ. $v_1 = \frac{2\sqrt{2}\,S}{\tau} \approx 2{,}83\,\frac{S}{\tau}$.