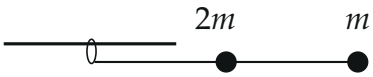
Спица с грузами на кольце

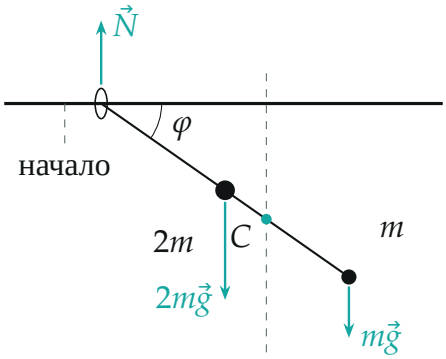
Задача 4. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 3, задача 4] К маленькому невесомому кольцу шарнирно прикреплена легкая спица длиной l. На середине и конце спицы закреплены точечные тела массой $2m$ и m. Кольцо надето на гладкий горизонтальный стержень. В начальный момент спицу удерживали горизонтально, а затем отпустили. Найти скорости кольца и тел, когда спица проходит вертикальное положение. Считать, что масса спицы равна нулю.



▲ **Решение. Что происходит.** Спица падает и поворачивается вокруг шарнира, а кольцо при этом свободно скользит по гладкому стержню. Это задача на два закона сохранения: горизонтальная проекция импульса системы сохраняется (внешние силы вертикальны), а механическая энергия — тоже (трения нет, связи идеальные). Главная идея: из сохранения горизонтального импульса центр масс грузов движется строго по вертикали; в вертикальном положении спицы это даёт связь скоростей, а энергия — их величину. Кольцо при этом не стоит на месте: оно едет в сторону, противоположную нижнему грузу.

Обозначения. Ось x — вдоль стержня (вправо, туда, где в начале лежали грузы), φ — угол спицы с горизонталью, $x_к$ — координата кольца, u — проекция скорости кольца на x, v_1 и v_2 — проекции скоростей грузов $2m$ и m в момент, когда спица вертикальна, ω — угловая скорость спицы в этот момент.

1. Внешние силы вертикальны. Кольцо невесомо, поэтому сумма сил на него равна нулю: сила со стороны спицы (через шарнир) уравновешена силой со стороны стержня. Стержень гладкий — его сила перпендикулярна стержню, то есть вертикальна. Значит, и спица действует на кольцо, а кольцо на спицу только вертикально. Внешние силы, действующие на систему «кольцо + спица + грузы», — сила тяжести грузов и сила реакции стержня — вертикальны.



Промежуточное положение ($\varphi = 35°$, координаты по формулам пункта 2): все внешние силы вертикальны, центр масс грузов C движется по вертикальной прямой (пунктир); кольцо уже сдвинулось вправо от начального положения

2. Горизонтальный импульс и центр масс. Раз внешние силы вертикальны, проекция импульса системы на ось x сохраняется. В начале всё покоилось, значит, в любой момент

$$2m\,v_{1x} + m\,v_{2x} = 0$$

(кольцо и спица невесомы и импульса не несут). Отсюда центр масс грузов не сдвигается по горизонтали. Он лежит на спице на расстоянии $\dfrac{2m\cdot\frac{l}{2} + m\cdot l}{3m} = \dfrac{2}{3}l$ от кольца; если в начале кольцо было в точке $x = 0$, то

$$x_к + \frac{2}{3}\,l\cos\varphi = \frac{2}{3}\,l \quad\Rightarrow\quad x_к = \frac{2}{3}\,l\,(1-\cos\varphi).$$

Кольцо уезжает вправо, а к моменту вертикального положения оказывается прямо над центром масс, в точке $x_к = \frac{2}{3}l$.

3. Скорости в вертикальном положении. Координаты грузов $y = -r\sin\varphi$ (по вертикали, $r = \frac{l}{2}$ и l), их вертикальные скорости $-r\cos\varphi\,\dot\varphi$ при $\varphi = 90°$ равны нулю: в этот момент все три тела движутся горизонтально. Спица — твёрдое тело, поэтому горизонтальная скорость её точки на глубине h под кольцом $u + \omega h$ (вращение с угловой скоростью

ω плюс движение кольца):

$$v_1 = u + \omega\frac{l}{2}, \qquad v_2 = u + \omega l.$$

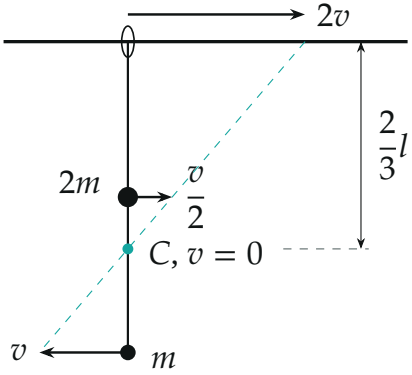
Подставим в закон сохранения импульса из пункта 2:

$$2m\left(u + \frac{\omega l}{2}\right) + m(u + \omega l) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{2}{3}\omega l.$$

Тогда

$$v_2 = \frac{1}{3}\omega l, \qquad v_1 = -\frac{1}{6}\omega l = -\frac{v_2}{2}, \qquad u = -2v_2.$$

Нижний груз движется в одну сторону со скоростью v, верхний — в противоположную со скоростью $v/2$, кольцо — в ту же сторону, что верхний груз, со скоростью $2v$. Скорость обращается в ноль на глубине $\frac{2}{3}l$ — ровно в центре масс, который по горизонтали не движется.



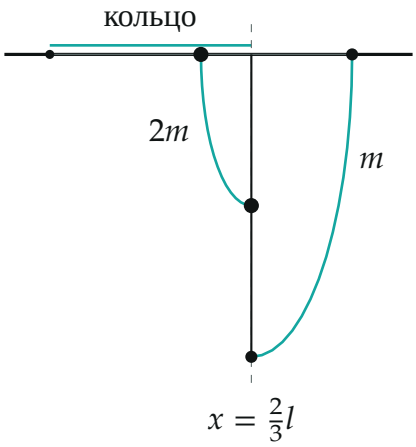
Спица вертикальна: скорости точек спицы растут линейно с глубиной (бирюзовый пунктир через концы стрелок) и обращаются в ноль в центре масс C на глубине $\frac{2}{3}l$; длины стрелок — в масштабе

4. Закон сохранения энергии. Сил трения нет, шарнир и гладкий стержень работы не совершают (сила стержня перпендикулярна перемещению кольца), поэтому механическая энергия системы сохраняется.

Груз $2m$ опустился на $\frac{l}{2}$, груз m — на l:

$$2mg\,\frac{l}{2}+mgl=\frac{2m\,(v/2)^2}{2}+\frac{mv^2}{2}\quad\Rightarrow\quad 2mgl=\frac{3}{4}\,mv^2\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{8gl}{3}}.$$

Кольцо невесомо, его кинетической энергии в балансе нет, хотя оно движется быстрее всех.



Траектории (посчитаны по пункту 2) от горизонтального положения до вертикального: кольцо едет вправо на $\frac{2}{3}l$, грузы описывают дуги эллипсов и сходятся к вертикали $x=\frac{2}{3}l$, на которой всё время остаётся их центр масс

Обратите внимание: «кольцо невесомо» не значит «кольцо стоит». Невесомое кольцо не несёт ни импульса, ни энергии, но движется — и быстрее всех тел системы.

Соберём ответ.

$$v_m=v=\sqrt{\frac{8gl}{3}},\qquad v_{2m}=\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{2gl}{3}},\qquad v_{\text{к}}=2v=4\sqrt{\frac{2gl}{3}};$$

груз m движется в одну сторону, груз $2m$ и кольцо — в противоположную.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gl}$ — скорость. Импульс: $2m\cdot\frac{v}{2}-m\cdot v=0$. Энергия: $\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\frac{2gl}{3}+\frac{1}{2}m\cdot\frac{8gl}{3}=\frac{2gl}{3}m+\frac{4gl}{3}m=2mgl$. Второй способ

для отношения скоростей — мгновенный центр вращения: центр масс по горизонтали неподвижен и в вертикальном положении лежит на спице, значит, это точка нулевой скорости, и скорости пропорциональны расстояниям до неё: $\frac{2}{3}l$ (кольцо), $\frac{1}{6}l$ (груз $2m$), $\frac{1}{3}l$ (груз m) — отношение $4:1:2$, как и получено.

Смысл: если бы шарнир был закреплён, грузы двигались бы по окружностям; подвижное кольцо даёт системе ещё одну степень свободы, и движение подстраивается так, чтобы центр масс падал строго вертикально.

Ответ. $v_m = \sqrt{\frac{8gl}{3}}$, $v_{2m} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8gl}{3}} = \sqrt{\frac{2gl}{3}}$ (в противоположную сторону), скорость кольца $2\sqrt{\frac{8gl}{3}}$ (в ту же сторону, что у груза $2m$).