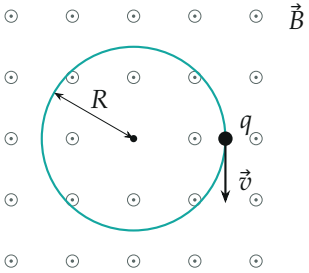
Заряд на круговой орбите при росте поля

Задача 5. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 3, задача 5] В однородном магнитном поле по круговой орбите радиуса R движется точечный заряд. Индукцию поля медленно (за время, много большее периода обращения заряда) увеличивают в 2 раза. Каким будет радиус орбиты заряда после этого?



Поясняющий рисунок: заряд q движется по окружности радиуса R; поле $\vec{B}$ направлено к нам (точки)

▲ **Решение. Что происходит.** Пока поле постоянно, сила Лоренца $q\vec{v}\times\vec{B}$ перпендикулярна скорости и только поворачивает её: заряд ходит по окружности. Когда B растёт, по закону электромагнитной индукции появляется вихревое электрическое поле, его силовые линии — окружности. На орбите оно направлено вдоль скорости и разгоняет заряд. Растёт и B, и v; как при этом меняется радиус $R = mv/(qB)$, решает соотношение между ними. Поле меняется медленно, поэтому в каждый момент орбита — почти окружность, и на каждом обороте можно писать и второй закон Ньютона для движения по окружности, и теорему о кинетической энергии с работой вихревого поля. Класс задачи — «адиабатическое (медленное) изменение параметра».

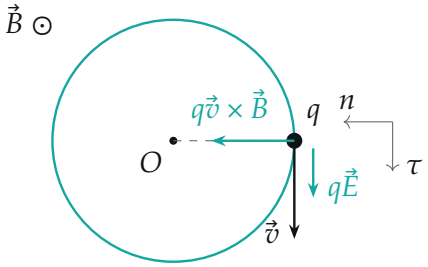
Обозначения. q, m — заряд и масса частицы; B, v, R — индукция, скорость и радиус в данный момент; E — напряжённость вихревого поля на орбите; $\Phi = B\pi R^2$ — магнитный поток через орбиту; $T = 2\pi R/v$ — период обращения.

1. Второй закон Ньютона по радиусу. На заряд действует сила Лоренца qvB, направленная к центру; вихревое поле $\vec{E}$ направлено по касательной и в радиальную проекцию не входит. Ось n — к центру орбиты, ускорение по ней центростремительное v^2/R:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{q}{m} BR. \tag{1}$$

Это верно в каждый момент, поэтому малые изменения ΔB, ΔR, Δv связаны тем же равенством:

$$\Delta v = \frac{q}{m} (R\,\Delta B + B\,\Delta R). \tag{2}$$



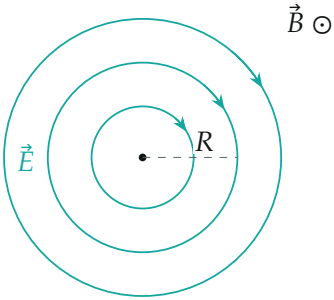
Силы на заряд: сила Лоренца к центру (ось n), сила вихревого поля по касательной (ось τ), она разгоняет заряд (пункт 2)

2. Вихревое поле на орбите. Закон электромагнитной индукции: циркуляция $\vec{E}$ по орбите равна скорости изменения потока $\Phi = B\pi R^2$ через неё. По симметрии E одинаково во всех точках окружности:

$$E \cdot 2\pi R = \pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{R}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Направление: по правилу Ленца вихревое поле стремится создать ток, ослабляющий рост B; движущийся по орбите заряд и есть такой ток, поэтому сила $q\vec{E}$ направлена по скорости и разгоняет его при любом знаке q (проверяется прямо: заряд, вращающийся в поле $\vec{B}$, создаёт поле, направленное против $\vec{B}$). При $\vec{B}$ к нам положительный заряд обходит ор-

биту по часовой стрелке, и вихревое поле при росте B направлено тоже по часовой.



Линии вихревого электрического поля при росте B — концентрические окружности; на орбите радиуса R поле равно $E = \frac{R}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}$

3. Теорема о кинетической энергии. Сила Лоренца работы не совершает, работа — только у силы qE вдоль пути $v\Delta t$:

$$\Delta\Big(\frac{mv^2}{2}\Big) = mv\,\Delta v = qE\,v\,\Delta t = \frac{qvR}{2}\,\Delta B \quad\Rightarrow\quad \Delta v = \frac{q}{m}\,\frac{R\,\Delta B}{2}. \qquad (3)$$

4. Что сохраняется. Приравниваем (2) и (3):

$$R\,\Delta B + B\,\Delta R = \frac{R\,\Delta B}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{R\,\Delta B}{2} + B\,\Delta R = 0.$$

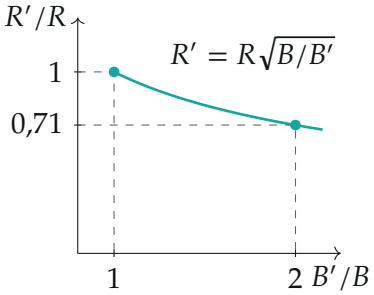
Умножим на $2R$ и учтём $\Delta(R^2) = 2R\,\Delta R$:

$$R^2\,\Delta B + B\,\Delta(R^2) = 0 \quad\Rightarrow\quad \Delta(BR^2) = 0.$$

Значит, $BR^2 = \text{const}$: поток $\Phi = \pi BR^2$ через орбиту при медленном изменении поля не меняется. Тогда при $B' = 2B$

$$R' = R\sqrt{\frac{B}{B'}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71R.$$

Знак: радиус уменьшается — поле растёт быстрее, чем разгоняется заряд.



Радиус орбиты от индукции при медленном изменении поля: $BR^2 = const$

Обратите внимание. Нельзя считать, что скорость заряда не меняется (тогда по (1) вышло бы $R' = R/2$): вихревое поле совершает работу и разгоняет заряд. Работает только «медленность»: за один оборот поле почти не меняется, и равенство (1) выполнено в каждый момент.

Проверка. Размерность: в (2) и (3) обе части — $\frac{q}{m}\,[\text{Тл}\cdot\text{м}] = \text{м/с}$. Второй способ: по (1) $v \propto BR \propto B\cdot B^{-1/2} = \sqrt{B}$, кинетическая энергия $\propto B$ — при удвоении поля она удваивается. Отношение энергии к частоте обращения $\omega = qB/m$ постоянно: $\frac{mv^2/2}{\omega} = \frac{q^2B^2R^2/(2m)}{qB/m} = \frac{qBR^2}{2} = \text{const}$ — это известный адиабатический инвариант, тот же результат.

Смысл: при медленном росте поля орбита стягивается так, что охватывает всё время один и тот же магнитный поток.

Ответ. $R' = \dfrac{R}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71R$ (сохраняется BR^2).