Газ с процессом pV³=const

Задача 1. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 4, задача 1] Идеальный газ расширяется по закону: $pV^3 = \text{const}$ (p и V — давление и объём газа). Во сколько раз изменяется внутренняя энергия газа при увеличении его объёма в $n = 3$ раза?



состояние 1: p, V, T состояние 2: p_2, $3V$, T_2

Поясняющий рисунок: газ под поршнем расширяется втрое; давление при этом падает по закону $pV^3 = const$

▲ **Решение. Что происходит.** Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, $U \propto T$, а по уравнению Клапейрона — Менделеева $\nu RT = pV$. Значит, $U \propto pV$, и задача сводится к тому, как меняется произведение pV в процессе $pV^3 = \text{const}$. Давление падает как V^{-3} — быстрее, чем растёт объём, поэтому pV и с ним U уменьшаются: газ остывает. Класс задачи — «политропический процесс, энергия через pV».

Обозначения. p, V, T — начальные давление, объём, температура; p_2, T_2 — конечные; ν — количество вещества; $U = \alpha\nu RT$ — внутренняя энергия ($\alpha = \frac{3}{2}$ для одноатомного газа, $\frac{5}{2}$ для двухатомного; ответ от α не зависит).

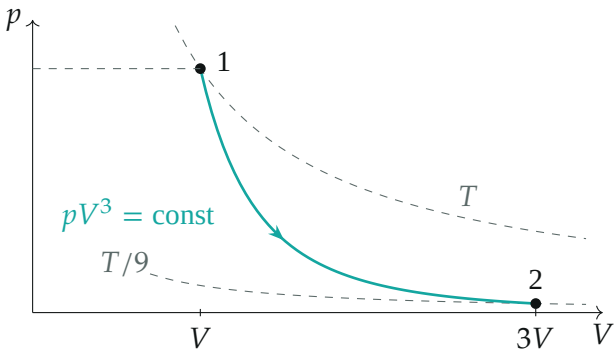
1. Энергия через pV. Уравнение Клапейрона — Менделеева $pV = \nu RT$ даёт

$$U = \alpha\nu RT = \alpha pV.$$

Количество газа и α в процессе не меняются, поэтому $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{p_2V_2}{pV}$.

2. Конечное давление из уравнения процесса. $pV^3 = p_2(3V)^3$:

$$p_2 = \frac{p}{n^3} = \frac{p}{27}.$$

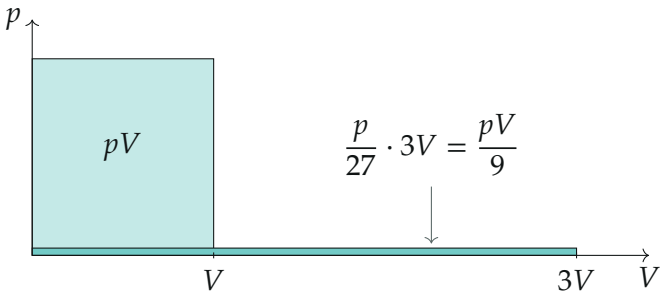


Процесс на pV-диаграмме (бирюзовая кривая, по точкам $p \propto V^{-3}$) и изотермы через начальное и конечное состояния: газ переходит с изотермы T на изотерму $T/9$

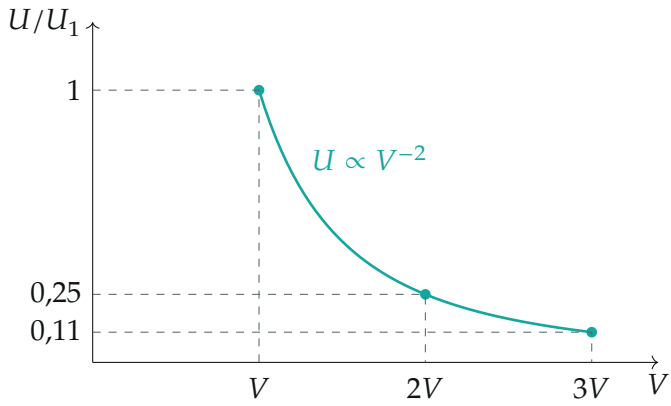
3. Отношение энергий.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{p_2 \cdot 3V}{pV} = \frac{3}{27} = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{9}.$$

В общем виде: $pV = \dfrac{pV^3}{V^2} = \dfrac{\text{const}}{V^2}$, то есть $U \propto V^{-2}$ и $T \propto V^{-2}$. Знак: отношение меньше единицы — энергия уменьшается в 9 раз.



Внутренняя энергия пропорциональна площади прямоугольника pV: в конце он втрое шире, но в 27 раз ниже



Внутренняя энергия (и температура) газа от объёма в этом процессе: $U/U_1 = (V_1/V)^2$

Обратите внимание. Тип газа (одно-, двух-, многоатомный) не нужен: коэффициент α сокращается в отношении. Уменьшение энергии не противоречит расширению: газ совершает работу и, кроме того, отдаёт тепло (процесс с показателем 3 круче адиабаты).

Проверка. Размерность: U_2/U_1 — безразмерно. Второй способ: $T \propto pV$, а из $pV^3 = \text{const}$ и $p \propto T/V$ получаем $TV^2 = \text{const}$, $T_2 = T/3^2 = T/9$. Предел: при $pV = \text{const}$ (изотерма) было бы $U_2 = U_1$; показатель $3 > 1$ даёт остывание.

Смысл: в процессе $pV^k = \text{const}$ энергия меняется как V^{1-k}; при $k = 3$ и тройном расширении — в 9 раз меньше.

Ответ. Внутренняя энергия уменьшится в $n^2 = 9$ раз.