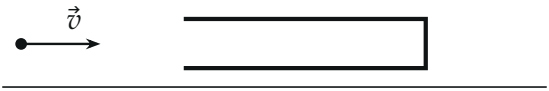
Шарик в пробирке

Задача 2. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 4, задача 2] На гладком горизонтальном столе лежит пробирка длиной l и массой $5m$. По оси пробирки горизонтально со скоростью v летит шарик массой m. Шарик влетает в пробирку, упруго отражается от её дна, а затем вылетает из неё. Через какое время после влета в пробирку это произойдёт? Искривлением траектории шарика за счёт силы тяжести пренебречь.



▲ **Решение.** **Что происходит.** До удара пробирка покоится (стол гладкий, шарик её не касается), и шарик проходит её длину l со скоростью v. Удар о дно упругий: сохраняются импульс и кинетическая энергия системы «шарик + пробирка». После удара шарик летит назад, пробирка едет вперёд, и выход шарика определяется их скоростью *друг относительно друга*. Главная идея — при упругом ударе относительная скорость тел меняет знак, но не модуль, поэтому назад шарик проходит пробирку так же быстро, как туда. Класс задачи — «упругий центральный удар + относительное движение».

Обозначения. Ось x — вдоль пробирки по начальной скорости шарика; v_1, u — проекции скоростей шарика и пробирки на ось x после удара; t_1 — время от влёта до удара, t_2 — от удара до вылета.

1. До удара. Пробирка неподвижна, шарик движется равномерно:

$$t_1 = \frac{l}{v}.$$

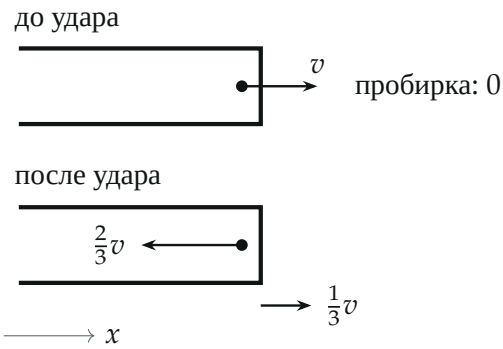
2. Удар о дно. Внешние силы (тяжести и реакции стола) вертикальны, поэтому сохраняется проекция импульса на ось x; удар упругий — сохраняется кинетическая энергия:

$$mv = mv_1 + 5mu, \qquad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{5mu^2}{2}.$$

Перепишем: $v - v_1 = 5u$ и $v^2 - v_1^2 = 5u^2$. Делим второе на первое ($v_1 \neq v$, иначе удара нет): $v + v_1 = u$. Отсюда

$$u = \frac{2v}{6} = \frac{v}{3}, \qquad v_1 = u - v = -\frac{2v}{3}.$$

Знак минус: шарик после удара летит против оси x, назад к открытому концу.



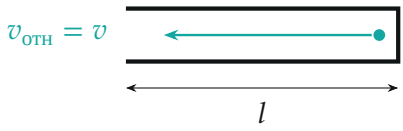
Скорости шарика и пробирки непосредственно до и после упругого удара о дно

3. После удара — в системе пробирки. Пробирка движется равномерно, её система отсчёта инерциальна. Скорость шарика относительно пробирки по закону сложения скоростей

$$v_{\text{отн}} = v_1 - u = -\frac{2v}{3} - \frac{v}{3} = -v,$$

то есть шарик удаляется от дна со скоростью v и проходит длину l за

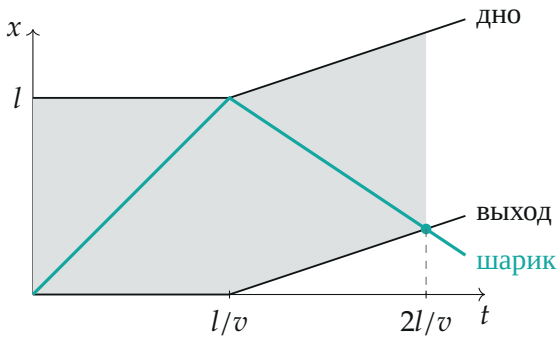
$$t_2 = \frac{l}{v}.$$



В системе отсчёта пробирки после удара шарик летит от дна к выходу со скоростью v

4. Полное время.

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{v} + \frac{l}{v} = \frac{2l}{v}.$$



Графики $x(t)$: шарик (бирюзовый), открытый конец и дно пробирки (чёрные). Внутри пробирки — серая полоса; шарик выходит из неё при $t = 2l/v$

Обратите внимание. После удара скорость шарика относительно стола $\frac{2}{3}v$, но сравнивать её с длиной l нельзя: выход пробирки тоже движется, навстречу шарику со скоростью $\frac{1}{3}v$.

Проверка. Размерность: $[l/v] =$ с. Второй способ: при упругом центральном ударе относительная скорость тел меняет знак, не меняя модуля, при любом отношении масс; до удара она была v, значит, и после удара v — снова $t = 2l/v$, масса пробирки ($5m$) в ответ не входит. Пределы: очень тяжёлая пробирка стоит, шарик отскакивает со скоростью v — $2l/v$; очень лёгкая уезжает со скоростью $2v$, шарик продолжает лететь с v, выход догоняет его с относительной скоростью v — снова $2l/v$.

Смысл: время пребывания шарика в пробирке не зависит от масс — это следствие упругости удара.

Ответ. $t = \dfrac{2l}{v}$.