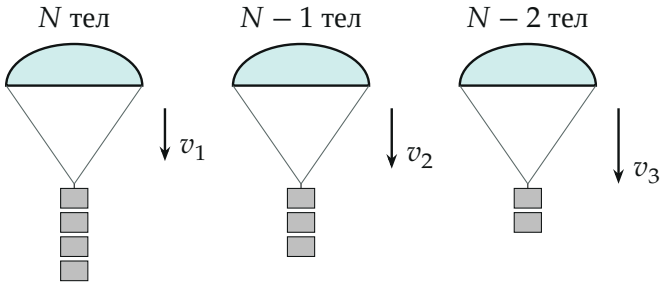
Падение на парашюте с отрывом тел

Задача 3. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 4, задача 3] Несколько одинаковых тел спускаются с парашютом с установившейся скоростью v_1. Когда одно тело оторвалось, установилась скорость падения v_2. Какая установится скорость, если оторвётся ещё одно тело? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости и определяется только парашютом — тела вклада в силу сопротивления воздуха не дают.



Поясняющий рисунок: парашют с N, $N-1$ и $N-2$ телами; установившиеся скорости $v_1 < v_2 < v_3$

▲ **Решение. Что происходит.** Скорость установилась — значит, ускорение нулевое и сила сопротивления парашюта уравновешивает силу тяжести всех висящих тел. Сопротивление растёт как v^2, поэтому квадрат установившейся скорости пропорционален числу тел. Число тел N, масса тела m и коэффициент сопротивления неизвестны, но каждое оторвавшееся тело уменьшает v^2 на одну и ту же величину — это и даёт ответ. Класс задачи — «установившееся движение с квадратичным сопротивлением».

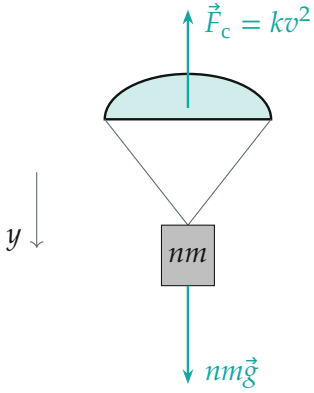
Обозначения. N — исходное число тел, m — масса одного тела; $F_c = kv^2$ — сила сопротивления, k — коэффициент; v_3 — искомая скорость. Ось y — вертикально вниз. Массой парашюта пренебрегаем (в условии о ней ничего не сказано; учёт её см. в «Обратите внимание»).

1. Второй закон Ньютона для парашюта с телами при установившемся движении. Ускорение равно нулю; в проекции на ось y:

$$nmg - kv^2 = 0,$$

где n — число висящих тел. Для трёх случаев:

$$kv_1^2 = Nmg, \qquad kv_2^2 = (N-1)mg, \qquad kv_3^2 = (N-2)mg.$$



Силы на систему «парашют + n тел»: сила тяжести вниз, сопротивление воздуха вверх

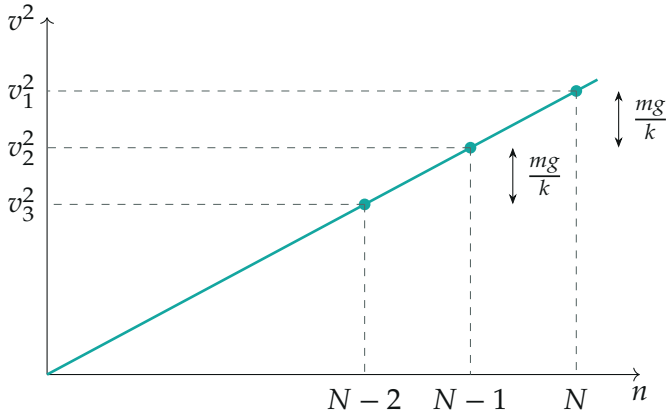
2. Исключаем неизвестные. Вычтем второе равенство из первого и третье из второго:

$$k\,(v_1^2 - v_2^2) = mg, \qquad k\,(v_2^2 - v_3^2) = mg.$$

Правые части равны, значит

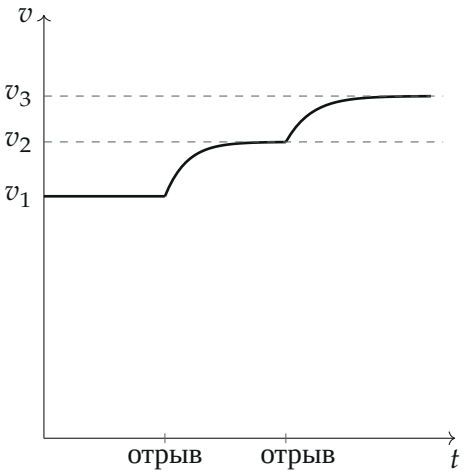
$$v_1^2 - v_2^2 = v_2^2 - v_3^2 \quad \Rightarrow \quad v_3^2 = 2v_2^2 - v_1^2, \qquad v_3 = \sqrt{2v_2^2 - v_1^2}.$$

Знак: $v_2 > v_1$ (тело оторвалось — парашют легче, падает быстрее), и $v_3 > v_2$, поскольку $v_3^2 - v_2^2 = v_2^2 - v_1^2 > 0$.



Квадрат установившейся скорости пропорционален числу тел, $v^2 = \frac{mg}{k}\,n$: соседние значения отличаются на одну и ту же величину mg/k

3. Когда ответ имеет смысл. Подкоренное выражение должно быть положительным: $v_1 < \sqrt{2}\,v_2$. Из $v_1^2/v_2^2 = N/(N-1)$ это означает $N/(N-1) < 2$, то есть $N > 2$ — после отрыва второго тела на парашюте ещё что-то осталось. При $N = 2$ получилось бы $v_3 = 0$: парашют без груза (и без собственной массы) не падает.



Качественный ход скорости: после каждого отрыва скорость растёт и выходит на новое установившееся значение (пример $N = 4$: $v_2 = \sqrt{3/2}\,v_1$, $v_3 = \sqrt{2}\,v_1$)

Обратите внимание. Если масса парашюта M не мала, первые три равенства получают слагаемое Mg, но в разностях оно сокращается — ответ тот же, а условие существования становится просто $v_1 < \sqrt{2}\,v_2$ без вывода $N > 2$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{2v_2^2 - v_1^2}$ — скорость. Пример: $N = 4, v_1^2 = 4a, v_2^2 = 3a$ ($a = mg/k$) — формула даёт $v_3^2 = 6a - 4a = 2a$, а напрямую $kv_3^2 = 2mg$, $v_3^2 = 2a$; совпадает.

Смысл: квадрат скорости спуска на парашюте «тикает» на одну и ту же ступеньку с каждым сброшенным телом.

Ответ. $v_3 = \sqrt{2v_2^2 - v_1^2}$ (при $v_1 < \sqrt{2}\,v_2$).