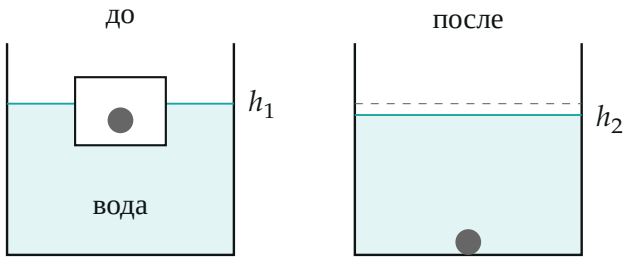
Лёд с вмороженным телом

Задача 4. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 4, задача 4] В цилиндрическом сосуде с водой площадью сечения S плавает кусочек льда с вмороженным в него телом. Масса тела m, плотность ρ (плотность тела больше плотности воды). Понизится или повысится уровень воды в сосуде и на сколько, если лёд полностью растает? Плотность воды ρ_0.



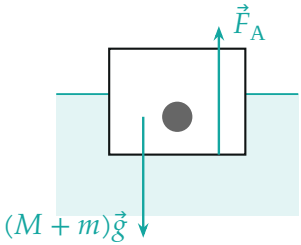
Поясняющий рисунок: лёд с вмороженным телом плавает; после таяния тело лежит на дне. Пунктир — прежний уровень

▲ **Решение.** **Что происходит.** Уровень воды в цилиндре определяется суммарным объёмом «вода + всё, что погружено». Воды в сосуде становится больше на растаявший лёд, но вытесняемый объём меняется: пока тело вморожено, лёд держит его на плаву и вытесняется вода весом, равным весу тела; на дне тело вытесняет только свой объём, а он меньше, потому что тело плотнее воды. Сравниваем два объёма. Класс задачи — «плавание и закон Архимеда, сравнение состояний».

Обозначения. M — масса льда; $V_{\text{п}}$ — объём погружённой части льда с телом до таяния; $V_{\text{т}} = m/\rho$ — объём тела; $V_{\text{в}}$ — объём воды в сосуде до таяния; h_1, h_2 — уровни до и после.

1. Условие плавания льда с телом. На систему «лёд + тело» действуют сила тяжести $(M + m)g$ вниз и сила Архимеда $\rho_0 g V_{\text{п}}$ вверх; ускорение нулевое, в проекции на вертикаль:

$$(M + m)g = \rho_0 g V_{\text{п}} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{п}} = \frac{M}{\rho_0} + \frac{m}{\rho_0}.$$

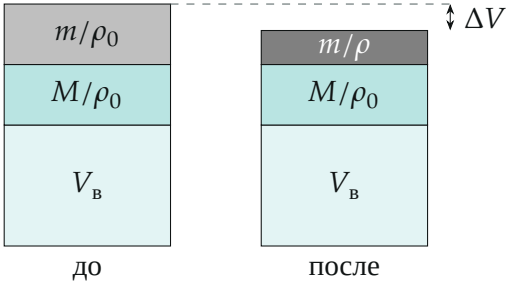


Силы на лёд с вмороженным телом: сила тяжести и сила Архимеда

2. Объём под уровнем до таяния. $Sh_1 = V_в + V_п = V_в + \dfrac{M}{\rho_0} + \dfrac{m}{\rho_0}$.

3. После таяния. Лёд массы M стал водой объёма M/ρ_0; тело плотнее воды, тонет и занимает объём m/ρ:

$$Sh_2 = V_в + \frac{M}{\rho_0} + \frac{m}{\rho}.$$

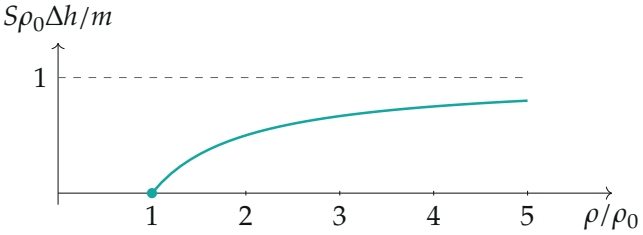


Объём под уровнем воды до и после таяния: вода из льда одна и та же, а вместо m/ρ_0 стало m/ρ

4. Изменение уровня. Вычитаем:

$$S(h_1 - h_2) = \frac{m}{\rho_0} - \frac{m}{\rho} = \frac{m(\rho - \rho_0)}{\rho_0 \rho} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = h_1 - h_2 = \frac{m(\rho - \rho_0)}{S\rho_0\rho}.$$

Знак: при $\rho > \rho_0$ разность положительна — уровень *понижается*.



Понижение уровня от плотности тела: $\Delta h = \frac{m}{S\rho_0}(1 - \frac{\rho_0}{\rho})$; при $\rho = \rho_0$ уровень не меняется, при очень плотном теле стремится к $\frac{m}{S\rho_0}$

Обратите внимание. Масса льда M в ответ не входит: сам лёд, растаяв, занимает ровно тот объём воды, который вытеснял (это известный результат «таяние чистого льда уровень не меняет»). Всё изменение — от тела.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг} \cdot \text{кг/м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{кг/м}^3 \cdot \text{кг/м}^3} = \text{м}$. Предел $\rho = \rho_0$: тело «как вода», $\Delta h = 0$. Предел $\rho \to \infty$: тело на дне почти не занимает места, уровень опускается на $\frac{m}{S\rho_0}$ — ровно на столько, на сколько его поднимал вес тела, плавающего вместе со льдом.

Смысл: плавая со льдом, тело вытесняет воду своим весом, а на дне — лишь своим объёмом.

Ответ. Уровень понизится на $\Delta h = \dfrac{m(\rho - \rho_0)}{S\rho_0\rho}$.