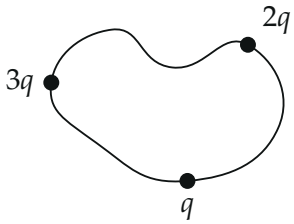
Три заряженные бусинки на нити

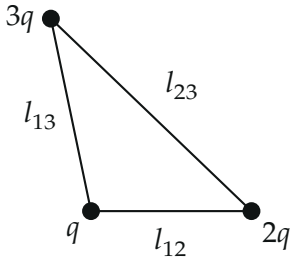
Задача 5. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 4, задача 5] На гибкую замкнутую непроводящую нить длиной l нанизаны три бусинки с зарядами одного знака q, $2q$ и $3q$, которые могут без трения скользить по нити. Бусинки отпускают, и они приходят в состояние равновесия. Найти силу натяжения нити. Ответ обосновать.



Поясняющий рисунок: замкнутая нить с тремя бусинками до того, как они пришли в равновесие

▲ **Решение.** **Что происходит.** Одноимённые заряды отталкиваются и разъезжаются по нити, пока нить не натянется. Каждая бусинка тогда сидит в «изломе» нити, и нить идёт от неё прямо к двум соседним бусинкам — получается треугольник. Нить скользит по бусинкам без трения, поэтому натяжение T во всей нити одно и то же. Каждая бусинка — как блок: на неё действуют два натяжения T вдоль сторон треугольника и две кулоновские силы вдоль тех же сторон. Из равновесия выйдет, что все три кулоновские силы равны T; это даёт длины сторон, а их сумма равна l. Класс задачи — «равновесие зарядов, связанных нитью».

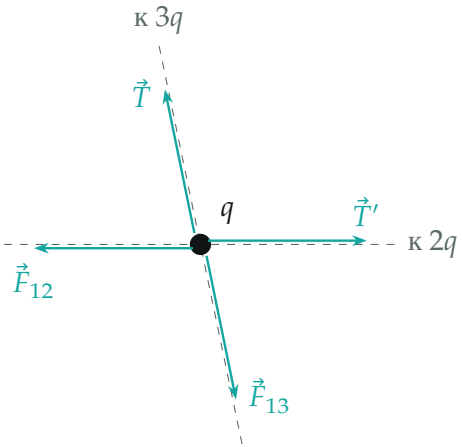
Обозначения. $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; l_{12}, l_{13}, l_{23} — расстояния между бусинками q и $2q$, q и $3q$, $2q$ и $3q$ (стороны треугольника); F_{12}, F_{13}, F_{23} — модули сил кулоновского отталкивания соответствующих пар; T — натяжение нити. Силу тяжести не учитываем (нить с бусинками считаем лежащей, например, на гладком горизонтальном столе, или задача в невесомости).



Равновесие: нить натянута треугольником с бусинками в вершинах. Пропорции вычислены по ответу: $l_{12} : l_{13} : l_{23} = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{6}$

1. Силы на бусинку q**.** На неё действуют: $\vec{F}_{12}$ — отталкивание от $2q$, вдоль прямой $(2q) \to q$; $\vec{F}_{13}$ — отталкивание от $3q$, вдоль прямой $(3q) \to q$; натяжения двух кусков нити $\vec{T}'$ (к бусинке $2q$) и $\vec{T}$ (к бусинке $3q$), как у нити, перекинутой через блок. Без трения натяжение по обе стороны бусинки одинаково: $|\vec{T}| = |\vec{T}'| = T$. Условие равновесия (первый закон Ньютона):

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{T} + \vec{T}' = 0.$$



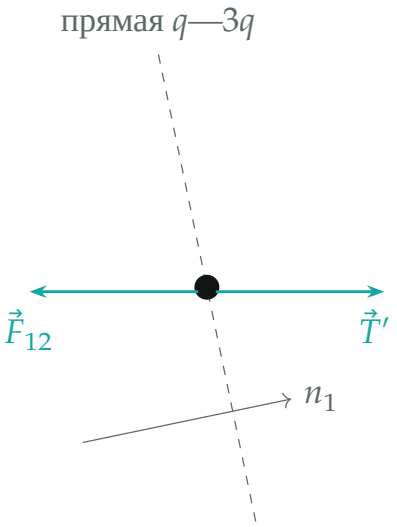
Силы на бусинку q*: на прямой к бусинке* $2q$ *—* $\vec{T}'$ *и* $\vec{F}_{12}$*, на прямой к бусинке* $3q$ *—* $\vec{T}$ *и* $\vec{F}_{13}$

2. Проекции. Силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{T}'$ лежат на прямой «q—$2q$», силы $\vec{F}_{13}$ и $\vec{T}$ — на прямой «q—$3q$». Эти прямые не совпадают (треугольник невы-

рожденный). Возьмём ось n_1, перпендикулярную прямой «q—$3q$»: проекции $\vec{F}_{13}$ и $\vec{T}$ на неё нулевые, и

$$F_{12}\sin\varphi - T\sin\varphi = 0 \;\Rightarrow\; F_{12} = T,$$

где φ — угол треугольника при бусинке q. Ось n_2, перпендикулярная прямой «q—$2q$», так же даёт $F_{13} = T$.



Ось n_1 перпендикулярна прямой «q—$3q$»: на неё проецируются только $\vec{T}'$ и $\vec{F}_{12}$, отсюда $F_{12} = T$

3. Все силы равны натяжению. То же для бусинки $2q$ даёт $F_{12} = T$ и $F_{23} = T$. Итак,

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = T.$$

По закону Кулона

$$T = \frac{2kq^2}{l_{12}^2} = \frac{3kq^2}{l_{13}^2} = \frac{6kq^2}{l_{23}^2} \quad\Rightarrow\quad l_{12} = \sqrt{\frac{2kq^2}{T}},\; l_{13} = \sqrt{\frac{3kq^2}{T}},\; l_{23} = \sqrt{\frac{6kq^2}{T}}.$$

4. Длина нити. Нить натянута по сторонам треугольника, бусинки

точечные:

$$l = l_{12} + l_{13} + l_{23} = \sqrt{\frac{kq^2}{T}}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}),$$

откуда

$$T = \frac{kq^2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2}{l^2} \approx 31{,}3\,\frac{kq^2}{l^2}.$$

Такой треугольник существует: $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3{,}15 > \sqrt{6} \approx 2{,}45$ — неравенство треугольника выполнено.

Обратите внимание. Нельзя считать треугольник равносторонним: заряды разные, и равны в равновесии именно *силы*, а не расстояния. Натяжение одинаково во всей нити только потому, что трения нет.

Проверка. Размерность: kq^2/l^2 — сила (закон Кулона). Предел: при трёх одинаковых зарядах q формула той же логики даёт $l = 3\sqrt{kq^2/T}$, $T = 9kq^2/l^2$ — для равностороннего треугольника со стороной $l/3$ это ровно сила Кулона $kq^2/(l/3)^2$, как и должно быть. Численно (python): стороны при $l = 1$ равны 0,253, 0,310, 0,438, и $2kq^2/l_{12}^2 = 3kq^2/l_{13}^2 = 6kq^2/l_{23}^2 = 31{,}3\,kq^2$.

Смысл: каждая бусинка работает как блок, и равновесие требует, чтобы каждая пара отталкивалась с силой, равной натяжению.

Ответ. $T = \dfrac{kq^2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2}{l^2} \approx 31{,}3\,\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$, где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.