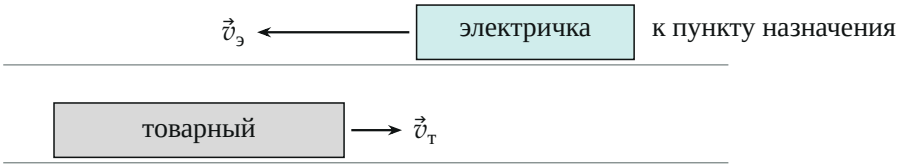
Товарный поезд и электричка

Задача 2. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 7 класс, задача 2] Товарный поезд и электричка, едущие навстречу друг другу с втрое отличающимися скоростями, проезжают мимо друг друга за время t_1. Электричка доезжает до пункта назначения и едет в обратную сторону с вдвое большей, чем сначала, скоростью. В течение какого времени электричка будет по параллельному пути проезжать мимо товарного поезда?



Поясняющий рисунок: поезда едут навстречу по параллельным путям; пункт назначения электрички — справа

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительное движение. Время, за которое поезда проезжают мимо друг друга, удобно считать в системе отсчёта товарного поезда: в ней товарный стоит, а электричка едет с относительной скоростью и должна пройти путь, равный сумме длин поездов. Встречное движение даёт сумму скоростей, попутное — разность. Сначала надо понять, какой из поездов быстрее: условие говорит лишь, что скорости отличаются втрое.

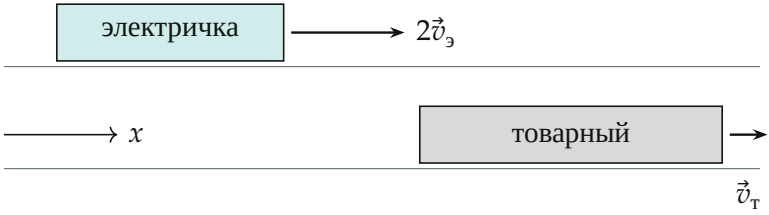
Обозначения. $l_т$, $l_э$ — длины товарного поезда и электрички; $v_т$ — скорость товарного поезда; $v_э$ — скорость электрички сначала, $2v_э$ — на обратном пути; t_2 — искомое время. Ось x направим по движению товарного поезда.

1. Какой поезд быстрее. После первой встречи товарный поезд продолжает ехать в свою сторону, а электричка — в свою, к пункту назначения. Развернувшись, электричка едет в ту же сторону, что и товарный поезд, и он оказывается *впереди* неё. Чтобы снова проехать мимо него, электричка должна его догнать, то есть ехать быстрее:

$$2v_э > v_т.$$

Если бы втрое быстрее был товарный поезд ($v_т = 3v_э$), то $2v_э < v_т$ — расстояние между поездами только росло бы, и встречи не было бы вовсе. Значит,

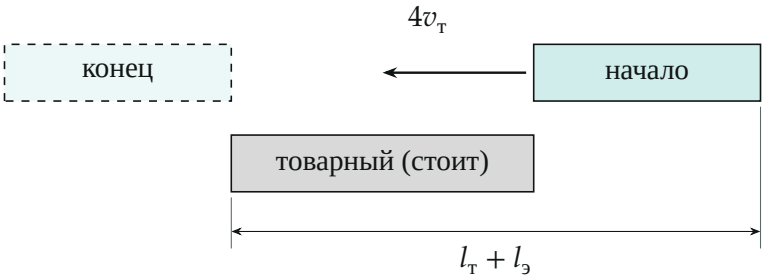
$$v_э = 3v_т, \qquad 2v_э = 6v_т.$$



После разворота электричка едет за товарным поездом в ту же сторону; догнать его она может, только если $2v_э > v_m$

2. Встречное движение: связь t_1 с длинами. Перейдём в систему отсчёта товарного поезда: в ней он стоит, и путь электрички виден сразу. По закону сложения скоростей скорость электрички относительно товарного поезда

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_э - \vec{v}_т, \qquad v_{отн\,x} = -v_э - v_т = -4v_т,$$



В системе отсчёта товарного поезда: электричка от положения «головы поравнялись» до положения «хвосты поравнялись» (пунктир) проходит путь $l_m + l_э$ со скоростью $4v_m$

По модулю относительная скорость равна $4v_т$. Проезд начинается, когда поравнялись головы поездов, и заканчивается, когда поравнялись

хвосты: за это время электричка относительно товарного проходит путь $l_т + l_э$. Движение равномерное, поэтому

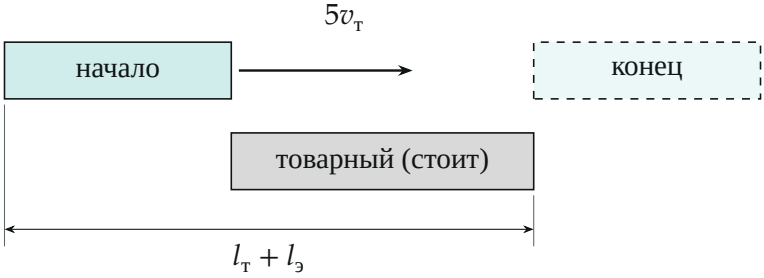
$$t_1 = \frac{l_т + l_э}{v_э + v_т} = \frac{l_т + l_э}{4v_т}.$$

3. Попутное движение: время обгона. В той же системе отсчёта на обратном пути

$$v'_{отн\,x} = 2v_э - v_т = 6v_т - v_т = 5v_т,$$

электричка догоняет товарный поезд со скоростью $5v_т$. Путь обгона — от «голова электрички у хвоста товарного» до «хвост электрички у головы товарного» — снова $l_т + l_э$:

$$t_2 = \frac{l_т + l_э}{2v_э - v_т} = \frac{l_т + l_э}{5v_т}.$$



Обгон в системе отсчёта товарного поезда: тот же путь $l_m + l_э$, но скорость теперь $5v_m$

4. Ответ через t_1. Неизвестные $l_т + l_э$ и $v_т$ исключаем, поделив t_2 на t_1:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{4v_т}{5v_т} = \frac{4}{5}, \qquad t_2 = \frac{4}{5}\,t_1.$$

Обгон короче встречи: относительная скорость $5v_т$ больше $4v_т$.

Обратите внимание: при встречном движении относительные скорости складываются, при попутном — вычитаются; путь «проезда мимо»

в обоих случаях один и тот же — сумма длин поездов, а не длина одного из них.

Проверка. Размерность: $\frac{l}{v}$ — время, t_2/t_1 безразмерно. Второй способ — в системе отсчёта земли: при обгоне голова электрички проходит $2v_э t_2 = 6v_т t_2$, хвост товарного — $v_т t_2$, разность $5v_т t_2$ должна быть равна $l_т + l_э = 4v_т t_1$, откуда снова $t_2 = \frac{4}{5}t_1$. Предел: если бы после разворота скорость электрички не росла, обгон шёл бы с относительной скоростью $2v_т$ и занял бы $2t_1$ — дольше встречи, как и ожидается.

Смысл: ответ не зависит ни от длин поездов, ни от их скоростей — только от отношения относительных скоростей $4 : 5$.

Ответ. $t_2 = \frac{4}{5}t_1$.