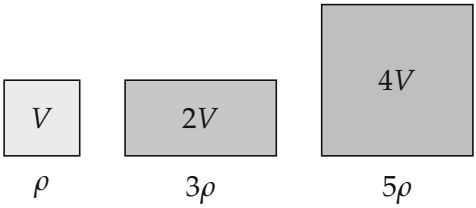
# Плотность сплава

**Задача 3.** [Росатом 2018/19, отборочный этап, 7 класс, задача 3] Сплав изготовили из трёх разных кусков трёх разных металлов: металла с плотностью $\rho$ объёмом $V$, металла плотностью $3\rho$ объёмом $2V$ и металла плотностью $5\rho$ объёмом $4V$. Найти плотность сплава. Считать, что объём сплава равен сумме объёмов его компонент.




*Поясняющий рисунок: три куска металла (объёмы в масштабе); под каждым — его плотность*

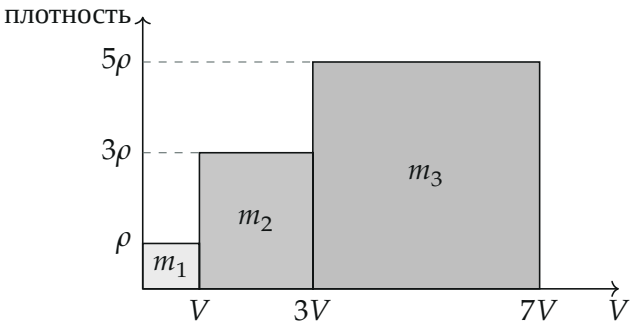
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю плотность. Плотность сплава — его масса, делённая на его объём. Масса сплава — сумма масс кусков (вещество никуда не девается), объём — сумма объёмов (так сказано в условии). Значит, плотность сплава — не среднее арифметическое плотностей, а «среднее с весами»: металл, которого больше по объёму, влияет сильнее.

**Обозначения.** $m_1, m_2, m_3$ — массы кусков; $M$, $V_0$, $\rho_0$ — масса, объём и плотность сплава.

**1. Массы кусков.** По определению плотности масса куска равна плотности, умноженной на объём:

$$m_1 = \rho V, \qquad m_2 = 3\rho \cdot 2V = 6\rho V, \qquad m_3 = 5\rho \cdot 4V = 20\rho V.$$

Удобно изобразить каждый кусок прямоугольником: ширина — объём, высота — плотность; тогда площадь прямоугольника — масса куска.




*Куски подряд: по горизонтали — объём, по вертикали — плотность; площадь каждого прямоугольника — масса куска*

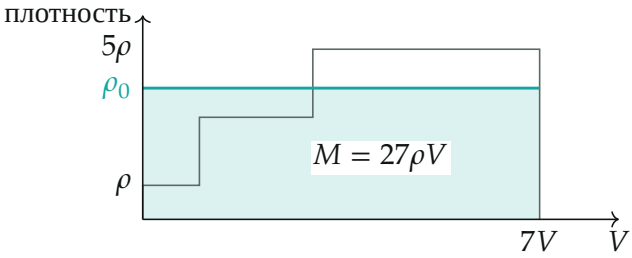
**2. Масса и объём сплава.** Масса сплава — сумма масс кусков, объём — сумма объёмов:

$$M = m_1+m_2+m_3 = (1+6+20)\rho V = 27\rho V, \qquad V_0 = V+2V+4V = 7V.$$

**3. Плотность сплава.** По определению плотности

$$\rho_0 = \frac{M}{V_0} = \frac{27\rho V}{7V} = \frac{27}{7}\rho \approx 3{,}86\,\rho.$$

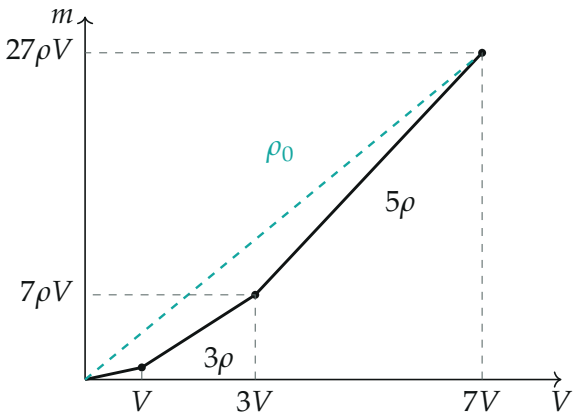
На рисунке со столбиками это значит: ступенчатую фигуру заменяем прямоугольником той же ширины $7V$ и той же площади $27\rho V$ — его высота и есть $\rho_0$.




*Тот же объём $7V$ и та же масса (площадь), но плотность всюду одинаковая — это сплав, его высота $\rho_0 = \frac{27}{7}\rho$ (бирюзой); серым — ступеньки отдельных кусков*

**4. Второй способ — график массы.** Будем «набирать» сплав, добавляя металл кусок за куском, и следить, как растёт масса $m$ с ростом объёма. На каждом куске график — отрезок прямой, его наклон равен плотности куска. Плотность сплава — наклон прямой из начала координат в конечную точку $(7V;\ 27\rho V)$:

$$\rho_0 = \frac{27\rho V}{7V} = \frac{27}{7}\rho.$$




*Масса набираемого сплава в зависимости от его объёма: наклоны отрезков — плотности кусков $\rho$, $3\rho$, $5\rho$; наклон пунктирной хорды — плотность сплава $\rho_0$*

Обратите внимание: среднее арифметическое плотностей $\frac{\rho+3\rho+5\rho}{3} = 3\rho$ — неверный ответ: оно годилось бы, только если бы объёмы кусков были равны. Здесь самого плотного металла больше всего, и плотность сплава выше $3\rho$.

**Проверка.** Размерность: $\frac{\rho V}{V}$ — плотность. Оценка: $\rho_0$ лежит между самой малой и самой большой плотностью, $\rho < \frac{27}{7}\rho < 5\rho$, и ближе к $5\rho$, потому что этого металла больше половины объёма. Предел: если бы был только третий кусок, вышло бы $\frac{20\rho V}{4V} = 5\rho$ — его собственная плотность.

Смысл: плотность смеси — средняя плотность с весами, равными долям объёма: $\rho_0 = \frac{1}{7}\rho + \frac{2}{7}\cdot 3\rho + \frac{4}{7}\cdot 5\rho$.

**Ответ.** $\rho_0 = \dfrac{27}{7}\,\rho \approx 3{,}86\,\rho$.