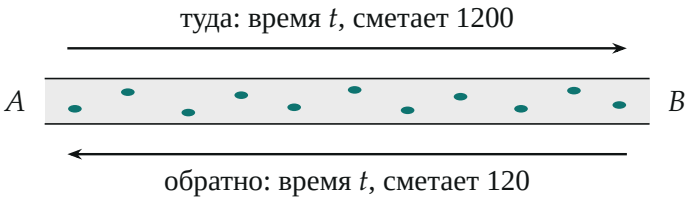
Дворник и листопад

Задача 4. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 7 класс, задача 4] Осень 2018 года была долгой и тёплой. Но в конце сентября начались обильные листопады. Дворник Иван Иваныч чистит от листьев дорожку в парке. В начале каждого часа он проходит дорожку в одну сторону и сметает с неё 1200 листьев. Потом Иван Иваныч сразу же разворачивается и на обратном пути сметает с дорожки 120 листьев. Сколько времени тратит Иван Иваныч на проход по дорожке в одну сторону? Сколько листьев останется на дорожке после его прохода по дорожке в обе стороны? Листья падают равномерно.



Поясняющий рисунок: дорожка AB, на которую всё время равномерно падают листья; в начале каждого часа дворник проходит её туда и сразу обратно

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на «заполнение и опустошение»: листья падают всё время, а дворник сметает их, проходя дорожку. Главное — листья продолжают падать, пока он идёт. В каждой точке он сметает только то, что успело упасть до его прихода, а то, что упало позже, остаётся. Поэтому за проход длительностью t сметается лишь половина листьев, упавших за это время. Режим установившийся: каждый час повторяется одно и то же.

Обозначения. n — число листьев, падающих на всю дорожку за единицу времени (листья падают равномерно — и по времени, и по длине дорожки); t — время прохода в одну сторону (дворник идёт с постоянной скоростью, в обе стороны одинаково); $t_0 = 60$ мин — час; N — число листьев на дорожке в начале часа; x — расстояние от начала дорожки A, ℓ — длина дорожки.

1. Сколько листьев сметается из упавших во время прохода. Пусть дворник идёт от A к B и начал в момент 0. В точку x он приходит в момент $\tau = \frac{x}{\ell} t$. Листья, упавшие в этой точке *до* его прихода, он сметает; упавшие *после*, до конца прохода t, остаются. На диаграмме «место — время» это два треугольника по разные стороны от линии движения дворника.

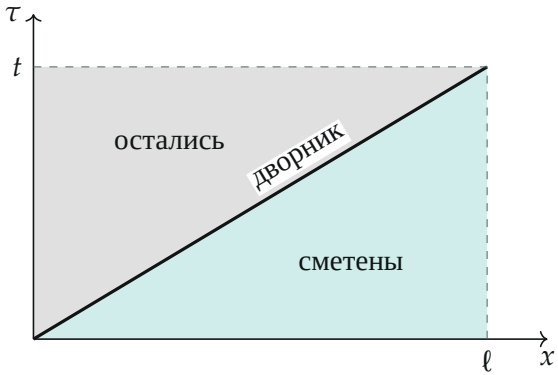


Диаграмма «место x — время τ» одного прохода от A к B: лист, упавший в точке x в момент τ, сметён, если точка $(x; \tau)$ ниже линии движения дворника (бирюзовый треугольник), и остаётся, если выше (серый)

Листья падают равномерно по месту и по времени, поэтому число листьев пропорционально площади на диаграмме. Прямоугольник $\ell \times t$ — это все nt листьев, упавших за проход; диагональ делит его на два равных треугольника. Значит, за проход

$$\text{сметается } \frac{nt}{2}, \qquad \text{остаётся } \frac{nt}{2}$$

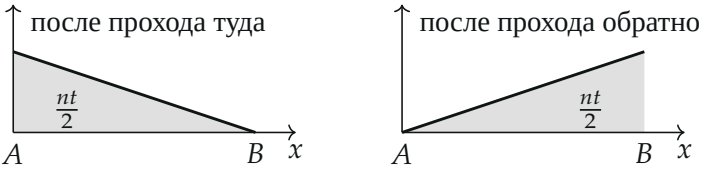
листьев из упавших за время прохода. То же без диаграммы: в точке x сметаются листья, упавшие за время $\frac{x}{\ell} t$, — от нуля в начале дорожки до t в конце; в среднем по дорожке за время $\frac{t}{2}$.

Листья, лежавшие на дорожке *до* начала прохода, сметаются все: дворник проходит каждую точку.

2. Обратный проход: найдём nt. К началу обратного прохода на дорожке лежат только листья, упавшие во время прохода туда и оставши-

еся, — $\frac{nt}{2}$ (всё, что было раньше, сметено). На обратном пути дворник сметает их все и ещё половину упавших за обратный проход:

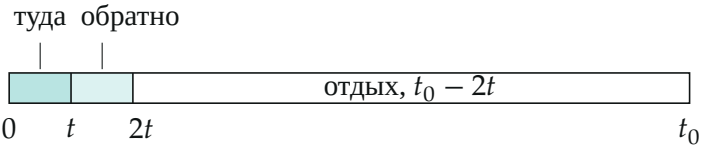
$$\frac{nt}{2} + \frac{nt}{2} = 120 \quad \Rightarrow \quad nt = 120.$$



Сколько листьев лежит на единице длины дорожки (по вертикали) сразу после прохода туда и сразу после прохода обратно: остаются те, что упали после ухода дворника, — больше всего там, откуда он ушёл раньше всех; площадь каждого треугольника — $\frac{nt}{2} = 60$ листьев

3. Сколько листьев лежит в начале часа. После обратного прохода остаётся $\frac{nt}{2}$ листьев. До начала следующего часа дворник отдыхает время $t_0 - 2t$, и за это время падает ещё $n(t_0 - 2t)$:

$$N = \frac{nt}{2} + n(t_0 - 2t).$$



Один час в масштабе (по найденному ответу $t = \frac{t_0}{11}$): два коротких прохода и долгий отдых, за который на дорожку и падает почти всё, что дворник потом сметёт

4. Проход туда: найдём t. В начале часа дворник сметает все N лежащих листьев и половину упавших за проход:

$$N + \frac{nt}{2} = 1200 \quad \Rightarrow \quad nt + n(t_0 - 2t) = 1200 \quad \Rightarrow \quad n(t_0 - t) = 1200.$$

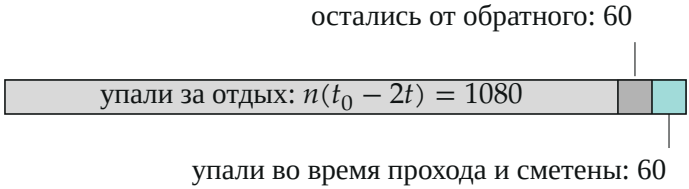
Неизвестных два — n и t; второе уравнение — из пункта 2: $nt = 120$. Складывая, получаем $nt_0 = 1320$, и, деля одно на другое,

$$\frac{t}{t_0} = \frac{120}{1320} = \frac{1}{11}, \qquad t = \frac{t_0}{11} = \frac{60}{11} \text{ мин} \approx 5{,}45 \text{ мин} \approx 5 \text{ мин } 27 \text{ с}.$$

Проход в обе стороны занимает $2t \approx 10{,}9$ мин.

5. Сколько листьев остаётся. После обратного прохода остаются листья, упавшие за него и не сметённые:

$$\frac{nt}{2} = \frac{120}{2} = 60.$$



Из чего складываются 1200 листьев, сметённых по пути туда (длины в масштабе)

Обратите внимание: нельзя считать, что дворник сметает всё, что упало за время прохода, — то, что упало за его спиной, остаётся до следующего прохода. Именно поэтому 120 листьев обратного пути — это nt, а не $\frac{nt}{2}$.

Проверка. Второй способ — баланс за час. Режим установившийся: сколько листьев упало за час, столько и сметено, иначе их число на дорожке росло бы от часа к часу. Значит, $nt_0 = 1200 + 120 = 1320$, а с $nt = 120$ снова $t = \frac{t_0}{11}$. Численная проверка (моделирование дворника на дорожке шаг за шагом, python): туда ≈ 1198, обратно ≈ 122, остаётся ≈ 60 — совпадает с точностью шага. Размерность: nt — число листьев, $\frac{t}{t_0}$ безразмерно. Предел: если бы дворник ходил мгновенно ($t \to 0$), обратно он не сметал бы ничего — и правда $nt \to 0$.

Смысл: обратный проход «меряет» скорость листопада за время прохода, а баланс за час — за весь час; их отношение и даёт время прохода.

Ответ. На проход в одну сторону Иван Иваныч тратит $t = \dfrac{t_0}{11} = \dfrac{60}{11}$ мин $\approx 5{,}45$ мин (в обе стороны — $\approx 10{,}9$ мин); после прохода в обе стороны на дорожке останется 60 листьев.