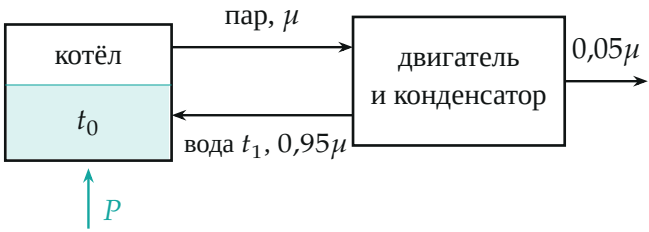
Котёл парового двигателя

Задача 3. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 8 класс, задача 3] К котлу парового двигателя с кипящей водой непрерывно подводят тепло мощностью $P = 15$ кВт. Образующийся при кипении водяной пар совершает работу, конденсируется в конденсаторе двигателя и возвращается в котел в виде воды с температурой $t_1 = 20°\text{C}$, причем возвращается 95 % массы выкипевшей воды, а 5 % — теряются. Через какое время количество воды в котле уменьшится вдвое, если первоначально в нем было $m = 20$ кг воды? Теплота парообразования $L = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), температура кипения воды — $t_0 = 100°\text{C}$.



Поясняющий рисунок: круговорот воды; μ — масса воды, выкипающей за секунду

▲ **Решение. Что происходит.** Вода в котле всё время кипит при t_0. Подводимое тепло тратится на две вещи: превращать воду в пар и догревать до кипения вернувшуюся холодную воду. Возврат идёт непрерывно, поэтому устанавливается постоянный режим: за каждую секунду выкипает одна и та же масса μ, а возвращается $0{,}95\mu$. Котёл теряет $0{,}05\mu$ в секунду, и половина воды уйдёт за время $\dfrac{m/2}{0{,}05\mu}$. Класс задачи — уравнение теплового баланса для установившегося процесса.

Обозначения. μ — масса воды, выкипающей за единицу времени (кг/с); Δt — малый промежуток времени; τ — искомое время.

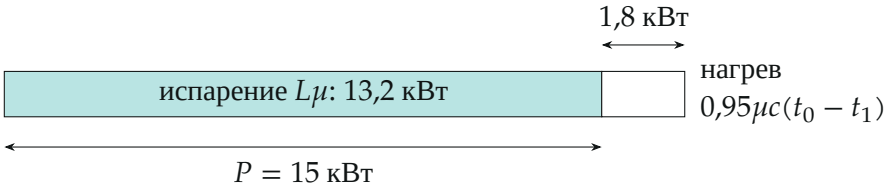
1. Тепловой баланс за время Δt. Закон сохранения энергии для воды в котле: подведённое тепло $P\Delta t$ идёт на испарение массы $\mu\Delta t$ (при t_0) и на нагрев от t_1 до t_0 вернувшейся массы $0{,}95\mu\Delta t$:

$$P\Delta t = L\mu\Delta t + c \cdot 0{,}95\mu\Delta t\,(t_0 - t_1).$$

Работа, которую совершает пар в двигателе, сюда не входит: её энергия — часть тепла, отданного паром в двигателе, а не в котле. Отсюда

$$\mu = \frac{P}{L + 0{,}95\,c\,(t_0 - t_1)} = \frac{15 \cdot 10^3}{2{,}3 \cdot 10^6 + 0{,}95 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 80}\ \frac{\text{кг}}{\text{с}},$$

$$\mu = \frac{15 \cdot 10^3}{2{,}619 \cdot 10^6}\ \frac{\text{кг}}{\text{с}} \approx 5{,}73 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

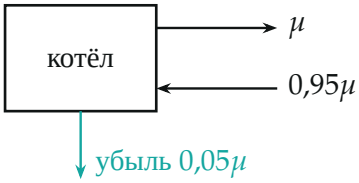


На что тратится мощность нагревателя: почти всё — на испарение, около 12 % *— на догрев вернувшейся воды*

2. Сколько воды теряет котёл. За секунду выкипает μ, возвращается $0{,}95\mu$; убыль массы в котле

$$\mu_1 = \mu - 0{,}95\mu = 0{,}05\mu \approx 2{,}86 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

Режим установившийся, μ_1 постоянна, и масса воды в котле убывает линейно.

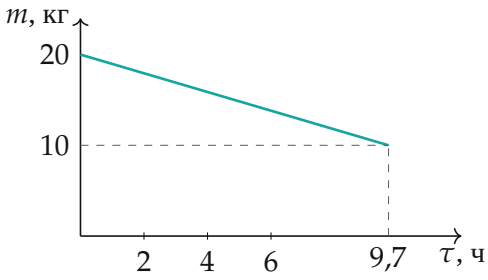


Массовый баланс котла за секунду: уходит μ*, приходит* $0{,}95\mu$

3. Время. Убыть должна половина воды, $m/2 = 10$ кг:

$$\tau = \frac{m/2}{0{,}05\mu} = \frac{m(L + 0{,}95\,c\,(t_0 - t_1))}{2 \cdot 0{,}05\,P},$$

$$\tau = \frac{20 \cdot 2{,}619 \cdot 10^6}{0{,}1 \cdot 15 \cdot 10^3}\ \text{с} \approx 3{,}49 \cdot 10^4\ \text{с} \approx 9{,}7\ \text{ч}.$$



Масса воды в котле от времени: убывает линейно со скоростью $0{,}05\mu \approx 1{,}03$ *кг/ч*

Обратите внимание: возвращённая вода не нагревается «бесплатно» — на её догрев до кипения уходит заметная часть мощности, и её нельзя выбросить из баланса.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг} \cdot \text{Дж/кг}}{\text{Вт}} = \dfrac{\text{Дж}}{\text{Дж/с}} = \text{с}$. Предел: если бы вода возвращалась уже кипящей, член нагрева пропал бы, $\mu = P/L$ и $\tau = \frac{mL}{0{,}1P} \approx 3{,}07 \cdot 10^4$ с — немного меньше: на испарение тогда шла бы вся мощность. Мощность: за τ подведено $P\tau \approx 5{,}2 \cdot 10^8$ Дж, выкипело $\mu\tau = 200$ кг воды — в двадцать раз больше потерянных 10 кг, как и должно быть при потере 5 %.

Смысл: котёл «прокачивает» через себя много воды, а теряет только двадцатую часть выкипевшего, поэтому половина воды уходит почти за 10 часов.

Ответ. $\tau = \dfrac{m(L + 0{,}95\,c\,(t_0 - t_1))}{2 \cdot 0{,}05\,P} \approx 3{,}49 \cdot 10^4\ \text{с} \approx 9{,}7\ \text{ч}.$