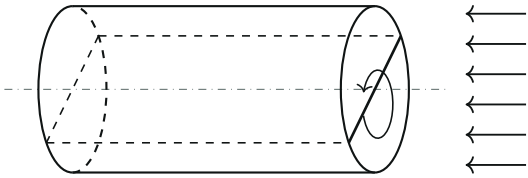
Труба с вращающейся перегородкой

Задача 5. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 8 класс, задача 5] Труба в форме цилиндра имеет длину $L = 5$ м. В трубу вставлена тонкая продольная перегородка, плотно прилегающая к стенкам трубы. Длина перегородки равна длине трубы. Она вращается вокруг оси трубы, совершая полный оборот за время $t = 0{,}01$ с. Вдоль оси трубы летит поток частиц, имеющих одинаковую скорость. Чему равна скорость частиц, если треть частиц пролетают через трубу, а две трети задерживаются перегородкой? Считать, что любая частица, которой коснулась перегородка, задерживается ею.

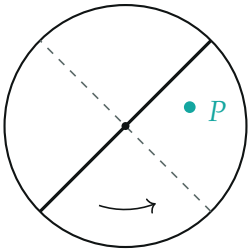


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение и вращение, класс «поток через периодически перекрываемый канал». Возьмём одну прямую, вдоль которой летят частицы (параллельно оси трубы). Перегородка — плоскость через ось — пересекает эту прямую периодически; в момент пересечения она задерживает все частицы, которые в этот момент находятся на этой прямой внутри трубы, то есть на участке длиной L. Доля задержанных частиц — доля потока, «выбитая» такими участками.

Обозначения. v — скорость частиц; $T = \frac{t}{2}$ — время между двумя пересечениями одной прямой перегородкой; $\tau = \frac{L}{v}$ — время пролёта частицы через трубу.

1. Как часто перегородка пересекает одну прямую. Перегородка плотно прилегает к стенкам, значит, это полоса через всю трубу — по диаметру, по обе стороны от оси. За один оборот каждая прямая, параллельная оси, оказывается на перегородке дважды: сначала её пересекает одна половина перегородки, через пол-оборота — другая. Поэтому

$$T = \frac{t}{2} = 0{,}005 \text{ с}.$$



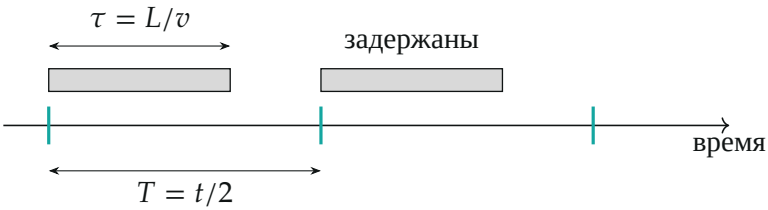
перегородка через пол-оборота — пунктир

Вид вдоль оси трубы: перегородка — диаметр; прямую, на которой летит частица P, задевает сначала одна половина перегородки, через пол-оборота — другая (пунктир)

2. Какие частицы задерживаются. Частица летит внутри трубы время $\tau = \frac{L}{v}$. Она задержится, если за это время перегородка хотя бы раз пройдёт через её прямую. Пересечения идут через равные промежутки T, частицы влетают в трубу равномерно во времени, поэтому задерживается доля

$$\frac{\tau}{T} = \frac{L/v}{t/2} = \frac{2L}{vt}$$

(при $\tau < T$; если бы $\tau \geqslant T$, задерживались бы все частицы).



Одна прямая, вдоль которой летят частицы: бирюзовые чёрточки — моменты, когда её пересекает перегородка, каждые T. Частицы, влетевшие в трубу за время τ до такого момента (серым), задерживаются; влетевшие в оставшуюся часть периода — проходят

3. Тот же счёт — по длине потока. За время T сквозь трубу проходит участок потока длиной $vT = \frac{vt}{2}$, а при каждом пересечении перегородка убирает из него участок длиной L — тот, что был внутри трубы. Частицы

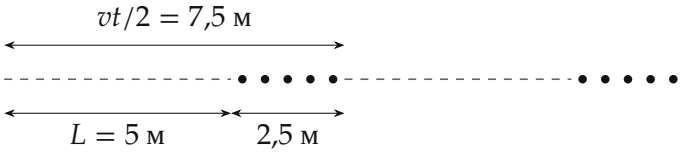
в потоке распределены равномерно, поэтому доля задержанных

$$\frac{L}{vt/2} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда

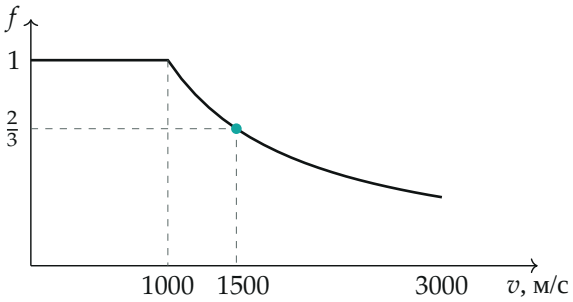
$$v = \frac{3L}{t} = \frac{3 \cdot 5}{0{,}01}\ \text{м/с} = 1500\ \text{м/с}.$$

Тогда $vT = 7{,}5$ м: из каждых 7,5 м потока выбиты 5 м, а 2,5 м пролетают.



Поток на одной прямой после трубы: пунктир — участки, выбитые перегородкой (по L), точки — пролетевшие частицы; период — $vt/2$

4. Как доля задержанных зависит от скорости. Из пункта 2 доля задержанных $f = \min\left(1,\ \frac{2L}{vt}\right)$: медленные частицы ($v \leqslant \frac{2L}{t} = 1000$ м/с) задерживаются все, быстрые — всё реже.



Доля задержанных частиц в зависимости от их скорости (по точкам формулы $f = \frac{2L}{vt}$); условию $f = \frac{2}{3}$ отвечает $v = 1500$ м/с

Обратите внимание: перегородка задевает каждую прямую *дважды* за оборот. Если взять период t вместо $\frac{t}{2}$, получится вдвое меньшая скорость, 750 м/с, — неверно.

Проверка. Размерность: $\frac{L}{t}$ — м/с. Подстановка: $\tau = \frac{5}{1500}$ с $\approx 0{,}0033$ с, $T = 0{,}005$ с, $\frac{\tau}{T} = \frac{2}{3}$ — как в условии. Численно (python): частицы со случайным моментом влёта, задержаны, если за время пролёта прошло пересечение, — доля $0{,}668$ из 10^5. Предел: при $v \to \infty$ частица пролетает мгновенно, и задерживается всё меньше частиц, $f \to 0$.

Смысл: доля задержанных — это доля времени, которую частица проводит в трубе, от промежутка между проходами перегородки.

Ответ. $v = \dfrac{3L}{t} = 1500$ м/с.