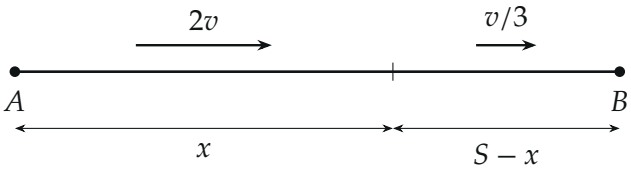
Средняя скорость автомобиля

Задача 1. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 9 класс, задача 1] Расстояние между двумя городами равно S. Первую часть пути автомобиль проехал со скоростью, в два раза большей средней скорости на всем пути, а вторую часть пути — со скоростью в три раза меньшей средней скорости на всем пути. Какова длина первой части пути?



Поясняющий рисунок: путь S из двух частей; v — средняя скорость на всём пути

▲ **Решение. Что происходит.** Средняя скорость — это весь путь, делённый на всё время, а не среднее арифметическое скоростей. Обе скорости заданы через среднюю, поэтому время на каждой части выражается через неё же, и условие «весь путь за всё время равен средней» даёт одно уравнение на x. Класс задачи — средняя скорость при движении с разными скоростями на участках.

Обозначения. v — средняя скорость на всём пути; x — длина первой части; t_1, t_2 — время на первой и второй частях; $t = t_1 + t_2$ — всё время.

1. Время на каждой части. На каждой части скорость постоянна, время — путь, делённый на скорость:

$$t_1 = \frac{x}{2v}, \qquad t_2 = \frac{S - x}{v/3} = \frac{3(S - x)}{v}.$$

2. Определение средней скорости. Средняя скорость — весь путь за всё время: $v = \dfrac{S}{t_1 + t_2}$, то есть $t_1 + t_2 = \dfrac{S}{v}$:

$$\frac{x}{2v} + \frac{3(S - x)}{v} = \frac{S}{v}.$$

Умножим на $2v$ (скорость v сократилась — её и не нужно знать):

$$x + 6S - 6x = 2S \quad \Rightarrow \quad 5x = 4S \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{5}S.$$

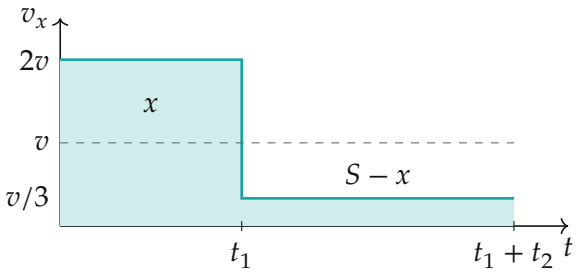
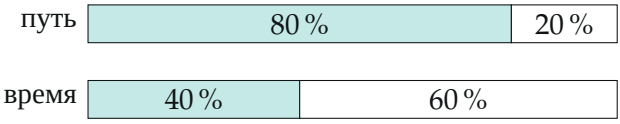


График скорости при $x = \frac{4}{5}S$ (построен в единицах S/v): $t_1 = 0{,}4\,S/v$, $t_2 = 0{,}6\,S/v$; площади под ступеньками — пути x и $S - x$, пунктир — средняя скорость v

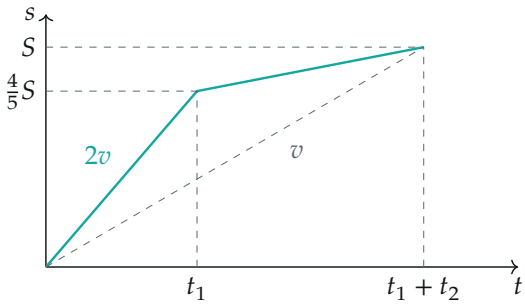
3. Как делится время. Подставим $x = \frac{4}{5}S$:

$$t_1 = \frac{4S/5}{2v} = 0{,}4\,\frac{S}{v}, \qquad t_2 = \frac{3 \cdot S/5}{v} = 0{,}6\,\frac{S}{v}, \qquad t_1 + t_2 = \frac{S}{v}.$$

Почти весь путь автомобиль едет быстро, но дольше всего он ползёт по короткому последнему отрезку: медленная часть «съедает» время.



Доли пути и времени: бирюзовая — первая часть (скорость $2v$), белая — вторая ($v/3$)



Путь от времени: ломаная из двух отрезков (наклоны $2v$ и $v/3$) приходит в ту же точку, что и прямая со средней скоростью v

Обратите внимание: ответ не зависит от самой средней скорости — все скорости заданы в долях от неё, и v сокращается.

Проверка. Размерность: x — доля пути S, метры. Второй способ: пусть $S = 5$ км, $v = 10$ км/ч; тогда $x = 4$ км за $4/20 = 0{,}2$ ч и 1 км за $1/(10/3) = 0{,}3$ ч, всего 0,5 ч, и $5/0{,}5 = 10$ км/ч — совпало. Предел: если бы обе скорости были больше v или обе меньше, средняя не могла бы быть v; здесь одна больше, другая меньше — решение есть, $0 < x < S$.

Смысл: на быстрый участок уходит 40 % времени, на медленный — 60 %; при этом быстрый участок — 80 % пути.

Ответ. $x = \dfrac{4}{5}S$.