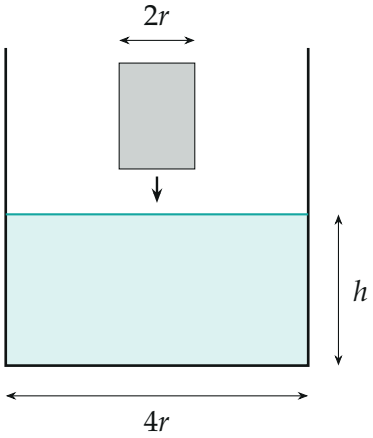
Палка в сосуде с водой

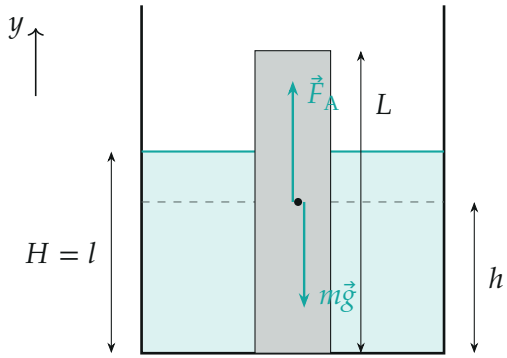
Задача 2. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 9 класс, задача 2] В высокий вертикальный цилиндрический сосуд с радиусом основания $2r$ налита вода. Высота столба воды h. В сосуд опускают цилиндрическую палку с радиусом сечения r и плотностью, составляющей $2/3$ от плотности воды. При какой минимальной длине палка коснется дна?



Поясняющий рисунок: сосуд с водой и палка над ним (вид сбоку, разрез)

▲ **Решение.** **Что происходит.** Палка лёгкая (плотность $2/3$ от воды) и плавает вертикально, погрузившись на $2/3$ своей длины. Но сосуд узкий — всего вдвое шире палки, — и погружённая палка заметно поднимает уровень воды. Палка коснётся дна, когда её погружённая часть станет равна новой глубине воды. Значит, нужны два закона: условие плавания (закон Архимеда) и сохранение объёма воды. Класс задачи — плавание тела в сосуде с учётом подъёма уровня.

Обозначения. ρ — плотность воды, $\frac{2}{3}\rho$ — плотность палки; $S = \pi r^2$ — сечение палки, $4S = \pi(2r)^2$ — сечение сосуда; L — длина палки; l — длина погружённой части; H — новая высота уровня воды. Ось y — вертикально вверх.



Предельный случай: палка плавает и как раз касается дна; пунктир — прежний уровень h

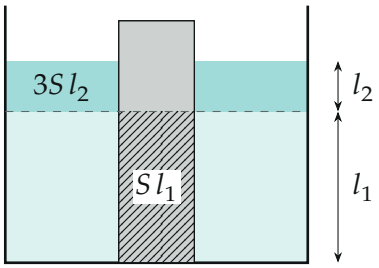
1. Сколько палки под водой. Палка плавает и касается дна без давления на него (предельный случай: чуть короче — не достанет). Второй закон Ньютона для палки в проекции на ось y, ускорения нет:

$$F_A - mg = 0, \qquad \rho g\, Sl = \tfrac{2}{3}\rho\, SL\, g \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2}{3}L.$$

Это условие плавания — оно не зависит от сосуда.

2. Куда поднялась вода. Вода не убывает и не прибывает — её объём сохраняется. До палки она занимала цилиндр $4S \cdot h$; после — цилиндр $4S \cdot H$ без погружённой части палки Sl:

$$4S\,h = 4S\,H - S\,l \quad \Rightarrow \quad H = h + \frac{l}{4}.$$

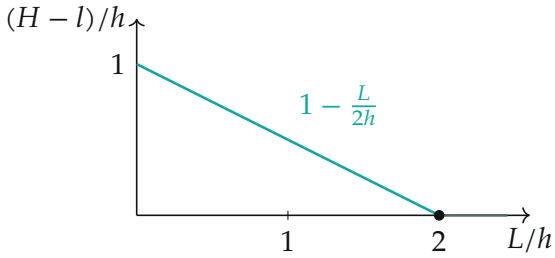


Объём палки ниже прежнего уровня (штриховка) выдавил воду в кольцевой слой над прежним уровнем (тёмная заливка)

Тот же результат другими словами: часть палки l_1 ниже прежнего уровня вытесняет воду в кольцо сечением $4S - S = 3S$ над ним, $Sl_1 = 3S\,l_2$, так что $l_2 = l_1/3$ и $l = l_1 + l_2 = \frac{4}{3}l_1$. Уровень поднялся на $l_2 = l/4$ — то же, что выше.

3. Условие касания дна. Нижний конец палки — на глубине l под новым уровнем, то есть на высоте $H - l$ над дном. Палка достаёт до дна при $H - l \le 0$. Подставим H и l:

$$H - l = h + \frac{l}{4} - l = h - \frac{3}{4}l = h - \frac{1}{2}L \le 0 \quad \Rightarrow \quad L \ge 2h.$$



Зазор между нижним концом плавающей палки и дном от длины палки: убывает линейно и обращается в нуль при $L = 2h$; длиннее — палка стоит на дне

Обратите внимание: если забыть подъём уровня (считать $H = h$), получится $l = h$, $L = \frac{3}{2}h$ — неверно: в узком сосуде уровень поднимается на четверть погружённой длины.

Проверка. Размерность: L выражена через h — метры. Числа: $h = 30$ см, $L = 60$ см; погружено $l = 40$ см, уровень $H = 30 + 10 = 40$ см $= l$ — палка как раз у дна. Предел: в очень широком сосуде уровень не меняется, $H = h$, и $L_{\min} = \frac{3}{2}h$; у нас сосуд узкий — нужна палка длиннее.

Смысл: длинная палка опускается глубже, но и сама поднимает воду; дна она достаёт, когда её длина вдвое больше исходной глубины.

Ответ. $L_{\min} = 2h$.