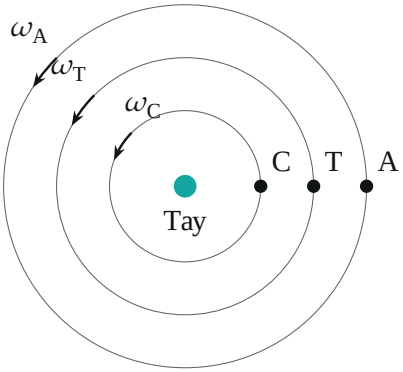
Три планеты вокруг звезды

Задача 5. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 9 класс, задача 5] Вокруг далекой звезды Tay из созвездия Кита в одной плоскости и в одну сторону вращаются три планеты — Солярис, Титан и Аврора. Известно, что Солярис обгоняет планету Титан каждые n своих лет. Титан обгоняет планету Аврора каждые k своих лет. Как часто по часам планеты Аврора ее обгоняет Солярис?



Поясняющий рисунок: три планеты на круговых орбитах в момент, когда они на одном луче; ближе к звезде — быстрее

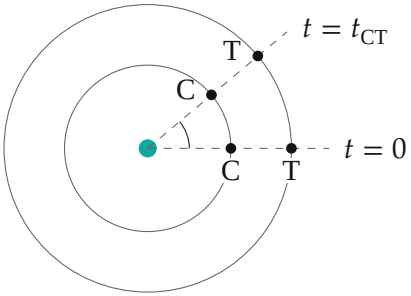
▲ **Решение. Что происходит.** «Обгоняет» — значит, планеты снова оказываются на одном луче от звезды. Между двумя обгонами быстрая планета проходит по углу ровно на полный оборот больше медленной. Это даёт связь угловых скоростей с числами n и k. Год каждой планеты — период её обращения, поэтому «каждые n своих лет» — это отношение времени обгона к периоду обгоняющей планеты. Класс задачи — кинематика вращения, синодический период (относительная угловая скорость).

Обозначения. ω_C, ω_T, ω_A — угловые скорости Соляриса, Титана, Авроры; $T_C = \dfrac{2\pi}{\omega_C}$ и т. д. — их годы; m — искомое число лет Авроры между обгонами. Солярис обгоняет Титан, Титан — Аврору, значит, $\omega_C > \omega_T > \omega_A$.

1. Время обгона. Пусть в момент $t = 0$ Солярис и Титан на одном луче. Углы поворота $\varphi = \omega t$. Следующий обгон — когда Солярис ушёл вперёд ровно на оборот:

$$\omega_C t_{CT} - \omega_T t_{CT} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad t_{CT} = \frac{2\pi}{\omega_C - \omega_T}.$$

Это то же, что перейти в систему отсчёта, вращающуюся с Титаном: там Солярис крутится с относительной скоростью $\omega_C - \omega_T$ и делает оборот за t_{CT}.



За время t_{CT} Титан повернулся на угол $\omega_T t_{CT}$, а Солярис — на тот же угол плюс полный оборот: они снова на одном луче

2. Переводим условие в уравнения. Обгон Титана Солярисом — каждые n лет Соляриса:

$$n = \frac{t_{CT}}{T_C} = \frac{\omega_C}{\omega_C - \omega_T} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} = 1 - \frac{\omega_T}{\omega_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_T}{\omega_C} = \frac{n-1}{n}.$$

Так же для обгона Авроры Титаном (каждые k лет Титана):

$$k = \frac{\omega_T}{\omega_T - \omega_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_A}{\omega_T} = \frac{k-1}{k}.$$

3. Искомое число. Солярис обгоняет Аврору за $t_{CA} = \dfrac{2\pi}{\omega_C - \omega_A}$; в

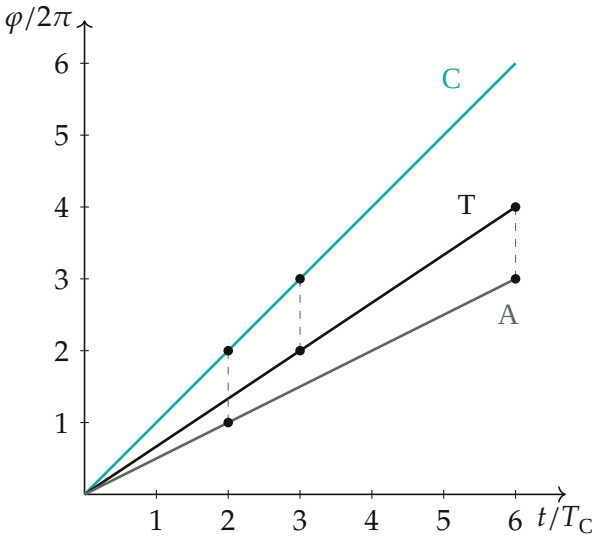
годах Авроры (а не Соляриса!)

$$m = \frac{t_{CA}}{T_A} = \frac{\omega_A}{\omega_C - \omega_A} = \frac{1}{\omega_C/\omega_A - 1}.$$

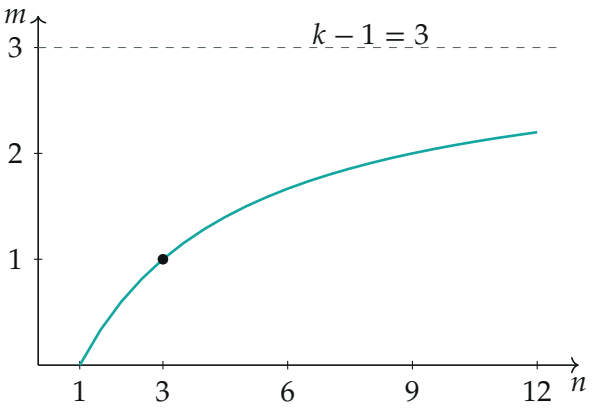
Отношение ω_C/ω_A получим, перемножив отношения шага 2:

$$\frac{\omega_A}{\omega_C} = \frac{\omega_T}{\omega_C} \cdot \frac{\omega_A}{\omega_T} = \frac{(n-1)(k-1)}{nk},$$

$$m = \frac{1}{\dfrac{nk}{(n-1)(k-1)} - 1} = \frac{(n-1)(k-1)}{nk - (n-1)(k-1)} = \frac{(n-1)(k-1)}{n+k-1}.$$



Число оборотов от времени для примера $n = 3$, $k = 4$ ($\omega_T = \frac{2}{3}\omega_C$, $\omega_A = \frac{1}{2}\omega_C$). Обгон — разность ровно в один оборот (пунктир): C–T при $t = 3T_C$, T–A при $t = 6T_C = 4T_T$, C–A при $t = 2T_C = 1 \cdot T_A$



Ответ при $k = 4$ как функция n (по формуле, 2–3 точки): при $n \to \infty$ (Солярис почти вместе с Титаном) $m \to k - 1$ — обгон Авроры Солярисом почти как обгон Титаном; точка — пример с графика выше

Обратите внимание: числа n, k, m отнесены к годам *разных* планет (Соляриса, Титана, Авроры), поэтому их нельзя просто сложить как времена — сначала всё переводим в угловые скорости.

Проверка. Пример с графика: $n = 3$, $k = 4$ даёт $m = \dfrac{2 \cdot 3}{3 + 4 - 1} = 1$ — совпадает с прямым счётом (обгон через $2T_\text{C}$, а $T_\text{A} = 2T_\text{C}$). Предел: если Аврора почти стоит ($k \to 1$, Титан обгоняет её за год Титана), то $m \to 0$: Аврора за время обгона почти не успевает повернуться, её год очень длинный. Величина безразмерная, как и должно быть для числа лет. Формула симметрична по n и k — это видно и из «перевёрнутых» равенств: $\frac{1}{m} + 1 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{k}{k-1}$.

Смысл: относительные угловые скорости складываются, а через годы разных планет это даёт ответ $m = \frac{(n-1)(k-1)}{n+k-1}$.

Ответ. $m = \dfrac{(n-1)(k-1)}{n+k-1}$ лет Авроры.