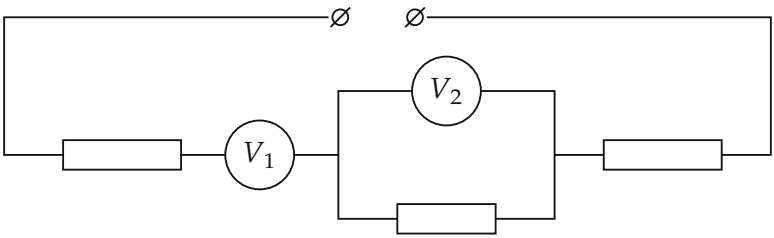
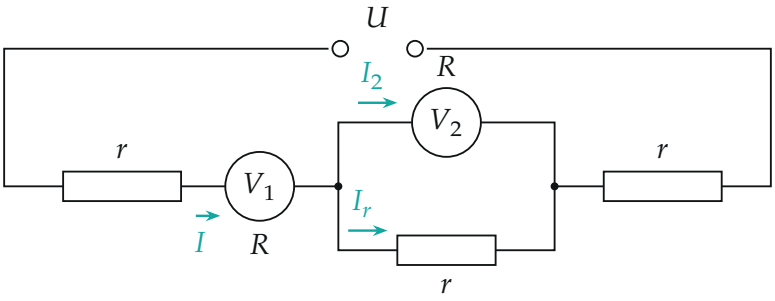
Два вольтметра и три резистора

Задача 1. [Росатом 2018/19, 10 класс, задача 1] Электрическую цепь собрали из двух одинаковых вольтметров и трех одинаковых резисторов. К цепи подключили источник постоянного напряжения. Известно, что показания вольтметра V_1 отличаются от показания вольтметра V_2 в три раза, при этом вольтметр V_1 показал напряжение $U_1 = 12$ В. Найти напряжение источника.



▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр — обычный резистор с большим, но конечным сопротивлением R, который показывает напряжение на самом себе. Цепь: резистор, V_1, параллельный участок (V_2 и средний резистор), резистор — всё последовательно. Ток через V_1 делится между V_2 и средним резистором, поэтому V_2 показывает меньше. Отношение показаний даёт отношение R к сопротивлению резистора r, а дальше — закон Ома для каждого участка. Класс задачи — расчёт цепи с неидеальными приборами.

Обозначения. r — сопротивление резистора, R — сопротивление вольтметра, I — ток через V_1 (он же через крайние резисторы), I_2 и I_r — токи через V_2 и средний резистор, U_2 — показание V_2, U — напряжение источника.



Сопротивления элементов и токи: ток I через V_1 делится на I_2 (через V_2) и I_r (через средний резистор)

1. Какой вольтметр показывает больше. Закон Ома для вольтметра: показание = ток через него $\times R$. Ток через V_1 — весь ток I, через V_2 — лишь его часть $I_2 < I$. Сопротивления вольтметров одинаковы, поэтому $U_1 > U_2$, и условие «отличаются в три раза» означает

$$U_2 = \frac{U_1}{3} = 4\text{ В}, \qquad I_2 = \frac{I}{3}.$$

2. Сопротивление вольтметра. Первое правило Кирхгофа (закон сохранения заряда) в узле после V_1: $I = I_2 + I_r$, откуда $I_r = \frac{2}{3}I = 2I_2$. Вольтметр V_2 и средний резистор подключены к одним и тем же узлам, напряжение на них одно, U_2:

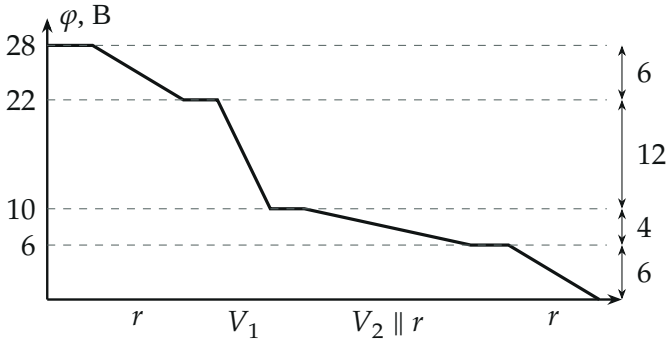
$$I_2 R = I_r\, r = 2I_2\, r \quad \Rightarrow \quad R = 2r.$$

3. Напряжения на крайних резисторах. Через каждый крайний резистор идёт тот же ток I, что и через V_1 (они соединены последовательно). Закон Ома:

$$U_r = Ir = \frac{U_1}{R}\, r = \frac{U_1}{2} = 6\text{ В}.$$

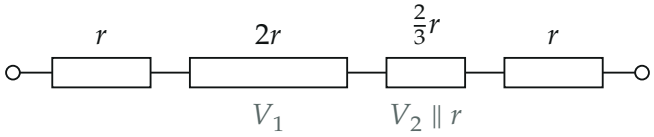
4. Напряжение источника. При последовательном соединении напряжения на участках складываются:

$$U = U_r + U_1 + U_2 + U_r = \frac{U_1}{2} + U_1 + \frac{U_1}{3} + \frac{U_1}{2} = \frac{7}{3}\,U_1 = \frac{7}{3}\cdot 12 = 28\text{ В}.$$



Потенциал вдоль цепи от левой клеммы к правой (В): падения $6+12+4+6=28$

5. Второй способ — общее сопротивление. Параллельный участок: $R_{\parallel}=\dfrac{Rr}{R+r}=\dfrac{2r\cdot r}{3r}=\dfrac{2}{3}r$. Всё последовательно: $R_{\text{общ}}=r+2r+\frac{2}{3}r+r=\frac{14}{3}r$. Источник даёт ток $I=U/R_{\text{общ}}$, а V_1 показывает $U_1=IR=U\cdot\dfrac{2r}{14r/3}=\dfrac{3}{7}U$, откуда $U=\frac{7}{3}U_1=28$ В.



Эквивалентная цепь: четыре последовательных сопротивления, длины прямоугольников пропорциональны сопротивлениям

Обратите внимание. Вольтметр V_1 не может показывать в три раза *меньше*, чем V_2: через него идёт весь ток, а через V_2 — только часть. Поэтому из двух прочтений условия возможно одно, $U_2=U_1/3$.

Проверка. Размерность: напряжения складываются в вольтах. Второй способ (через общее сопротивление) дал то же 28 В. Предел: при идеальных вольтметрах ($R\to\infty$) отношение $U_1/U_2=1+R/r$ стало бы бесконечным; конечное $R=2r$ даёт ровно 3.

Ответ. $U=\dfrac{7}{3}U_1=28$ В.