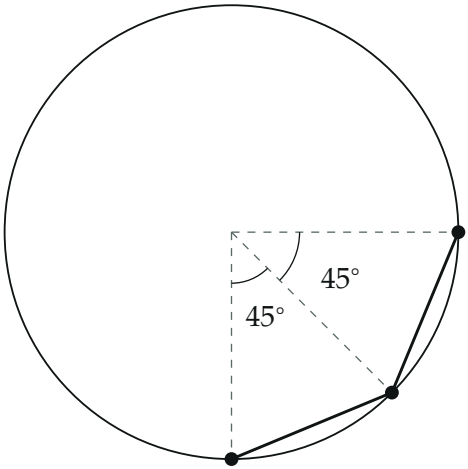
Три шарика на стержнях в сфере

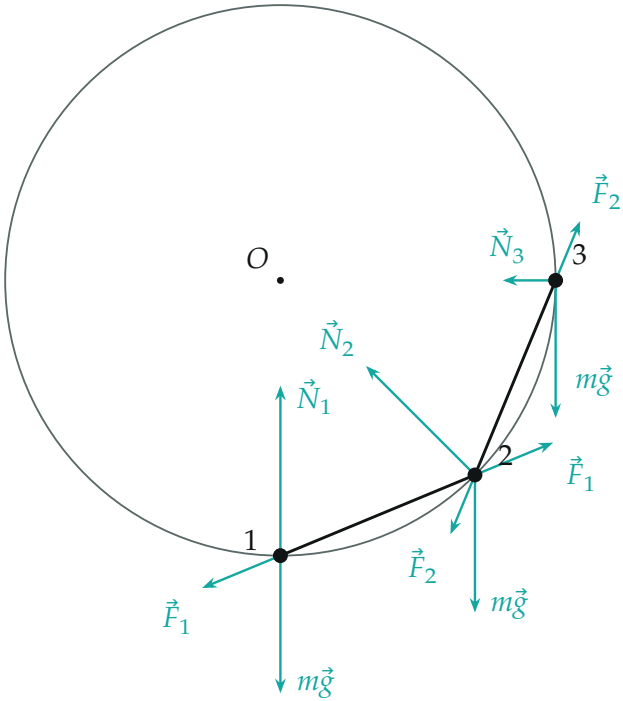
Задача 2. [Росатом 2018/19, 10 класс, задача 2] Три одинаковых массивных шарика связывают двумя невесомыми стержнями и удерживают в вертикальной плоскости так, что шарики касаются внутренней поверхности закрепленной сферы (см. рисунок). В некоторый момент шарики отпускают. Найти ускорения шариков сразу после их освобождения. Трением пренебречь.



▲ **Решение.** **Что происходит.** В момент отпускания шарики покоятся, поэтому их центростремительные ускорения v^2/R равны нулю, и ускорение каждого шарика направлено по касательной к сфере. Стержни сохраняют расстояния между шариками, поэтому система из трёх шариков может только поворачиваться внутри сферы как одно целое — касательные ускорения всех шариков одинаковы. Неизвестных сил много (три реакции сферы, две силы стержней), но в сумме проекций на касательные силы стержней сокращаются. Класс задачи — динамика связанных тел в начальный момент движения.

Обозначения. R — радиус сферы, O — её центр; $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 45°$, $\theta_3 = 90°$ — углы радиусов к шарикам 1 (нижний), 2, 3 от вертикали вниз; $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$ — силы реакции сферы; F_1, F_2 — силы, с которыми стержни 1–2 и 2–3 действуют на шарики (по третьему закону Ньютона

на оба конца стержня одинаковые по модулю и противоположные); $\vec{a}_i$ — ускорения; α — угол между стержнем и касательной.

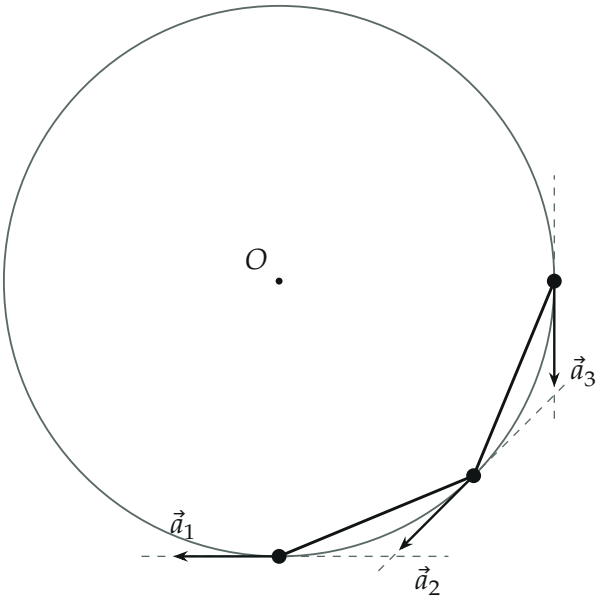


Силы на шарики (длины — по результату расчёта; оба стержня сжаты и расталкивают шарики)

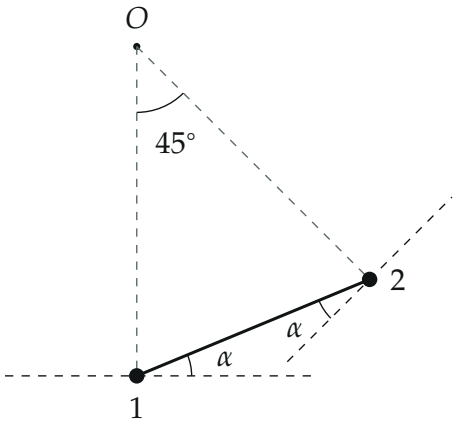
1. Куда направлены ускорения. В начальный момент скорости нулевые. Ускорение точки, движущейся по окружности, раскладывается на центростремительное v^2/R (здесь ноль) и касательное. Поэтому $\vec{a}_i$ направлены по касательным к сфере. Ось τ_i у каждого шарика выбираем по касательной в сторону, куда шарик начнёт двигаться, — вниз по сфере, к уменьшению угла θ; это оси, на которые не проектируются неизвестные реакции N_i (они направлены к центру, перпендикулярно касательной).

2. Ускорения одинаковы. Стержень 1–2 нерастяжим: проекции ускорений его концов на сам стержень равны (иначе в следующий миг его длина начала бы меняться). Хорда, стягивающая дугу 45°, образует с

касательными в своих концах одинаковые углы $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 45° = 22{,}5°$ (угол между касательной и хордой равен половине центрального угла). Значит, $a_1 \cos\alpha = a_2 \cos\alpha$, $a_1 = a_2$. Так же для стержня 2–3: $a_2 = a_3$. Обозначим общее значение a.



Ускорения направлены по касательным (пунктир) и равны по модулю



Стержень 1–2 — хорда, стягивающая дугу 45°; она образует с касательными в обоих концах один и тот же угол $\alpha = 22{,}5°$

3. Второй закон Ньютона в проекциях на касательные. Проекция силы тяжести на ось τ_i равна $mg\sin\theta_i$: у нижнего шарика 0, у среднего $mg\sin 45°$, у верхнего mg. Сила стержня 1–2 на шарик 1 и на шарик 2 противоположны по направлению, а углы с касательными одинаковы (α), поэтому их проекции на «свои» оси равны по модулю и противоположны по знаку. Обозначим проекцию силы стержня 1–2 на ось τ_1 через $-F_1\cos\alpha$ (тогда на ось τ_2 это $+F_1\cos\alpha$), аналогично для стержня 2–3:

$$ma = -F_1\cos\alpha,$$
$$ma = mg\sin 45° + F_1\cos\alpha - F_2\cos\alpha,$$
$$ma = mg + F_2\cos\alpha.$$

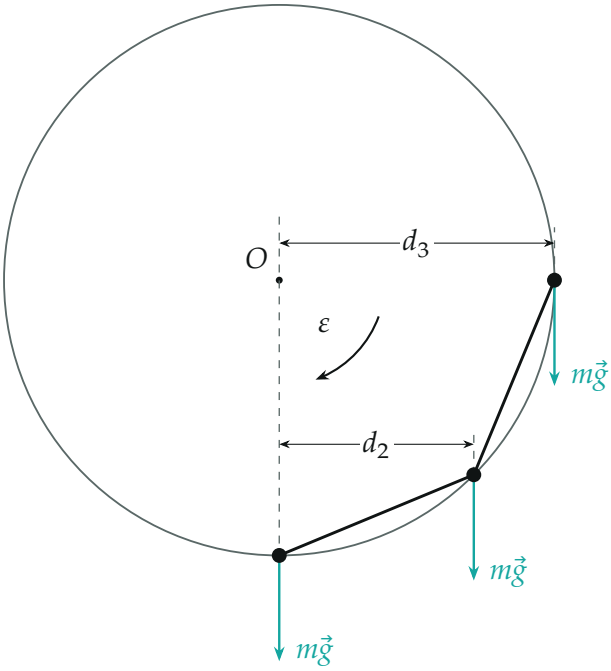
4. Ускорение. Складываем три уравнения — силы стержней сокращаются:

$$3ma = mg(\sin 0° + \sin 45° + \sin 90°) = mg\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad a = \frac{2+\sqrt{2}}{6}g.$$

Численно $a \approx 0{,}57\,g$. Силы стержней (по желанию): $F_1\cos\alpha = -ma$, $F_2\cos\alpha = ma - mg$ — обе отрицательны, то есть оба стержня сжаты: $|F_1| \approx 0{,}62\,mg$, $|F_2| \approx 0{,}47\,mg$. Реакции сферы из проекций на радиусы: $N_1 \approx 1{,}24\,mg$, $N_2 \approx 1{,}12\,mg$, $N_3 \approx 0{,}18\,mg$ — все положительны, шарики от сферы не отрываются, и предположение о движении по сфере верно.

5. Второй способ — поворот как целого. Пока шарики на сфере и стержни жёсткие, система поворачивается вокруг O с угловым ускорением ε, и $a = \varepsilon R$. Уравнение моментов относительно O: реакции $\vec{N}_i$ проходят через O (момент ноль), силы стержней попарно равны и лежат на одной прямой (суммарный момент ноль), остаются моменты сил тяжести с плечами $d_i = R\sin\theta_i$:

$$3mR^2\,\varepsilon = mgR(0 + \sin 45° + 1) \quad\Rightarrow\quad a = \varepsilon R = \frac{2+\sqrt{2}}{6}g.$$



Моменты сил тяжести относительно центра O: плечи $d_1 = 0$, $d_2 = R\sin 45°$, $d_3 = R$

Обратите внимание. Ускорения шариков одинаковы по модулю, но направлены по-разному: у нижнего — горизонтально, у среднего — под 45° к горизонту, у верхнего — вертикально вниз. «Ускорение шариков» в ответе — это их общий модуль. Важно, что скорости в начальный момент нулевые: только поэтому ускорения касательные.

Проверка. Размерность: $[a] = [g]$. Предел: если бы все три шарика были на уровне центра ($\theta_i = 90°$), каждый падал бы вдоль стенки, $a = g$; если бы все внизу, $a = 0$. Наш ответ $0{,}57g$ лежит между ними. Два способа (сумма проекций и моменты относительно O) дали одно и то же.

Ответ. Все три шарика имеют одинаковые по модулю ускорения $a = \dfrac{2+\sqrt{2}}{6}\,g \approx 0{,}57\,g$, направленные по касательным к сфере.