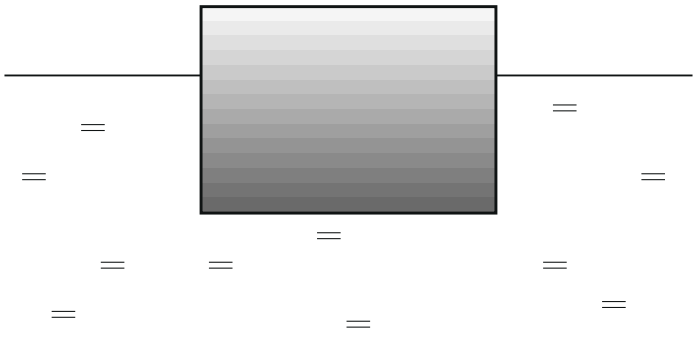
Неоднородный брусок

Задача 3. [Росатом 2018/19, 10 класс, задача 3] Имеется неоднородный брусок в форме прямоугольного параллелепипеда, плотность которого уменьшается с высотой. Опущенный в воду, брусок плавает, погрузившись в воде на $2/3$ объема. Если разрезать брусок пополам и опустить в воду более легкую половину, она будет плавать, погрузившись наполовину. Будет ли плавать нижняя половина? Если да, то найти минимальную силу, которую нужно приложить нижней половине бруска, чтобы утопить ее. Если нет, то найти минимальную силу, которую нужно приложить к нижней половине бруска, чтобы оторвать ее от дна. Масса бруска m.



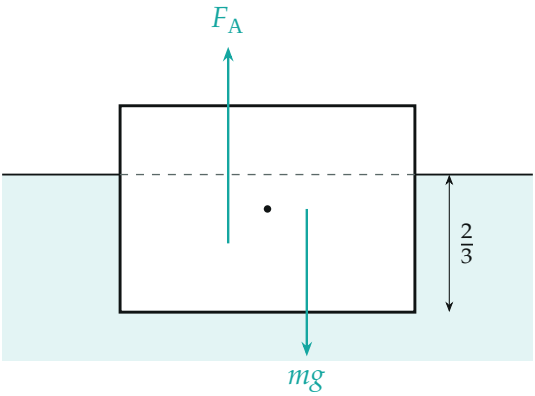
▲ **Решение. Что происходит.** Плавание тела определяется его средней плотностью: тело плавает, если она меньше плотности воды, и доля погружённого объёма равна отношению средней плотности к плотности воды. Из двух опытов находим среднюю плотность целого бруска и его верхней (лёгкой) половины, а среднюю плотность нижней половины — из того, что масса целого бруска складывается из масс половин. Класс задачи — закон Архимеда и условие плавания для неоднородного тела.

Обозначения. V — объём бруска, ρ_0 — плотность воды, ρ — средняя плотность всего бруска, ρ_1 и ρ_2 — средние плотности верхней и нижней половин, m_1, m_2 — их массы, F — искомая сила.

1. Целый брусок. На плавающий брусок действуют сила тяжести $mg = \rho g V$ и сила Архимеда, равная весу воды в объёме погружённой

части $\frac{2}{3}V$. Условие равновесия (первый закон Ньютона в проекции на вертикаль):

$$\rho g V = \rho_0 g \cdot \frac{2}{3}V \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{2}{3}\rho_0, \qquad \rho_0 V = \frac{3m}{2}.$$



Целый брусок: сила Архимеда от погружённых 2/3 объёма уравновешивает силу тяжести

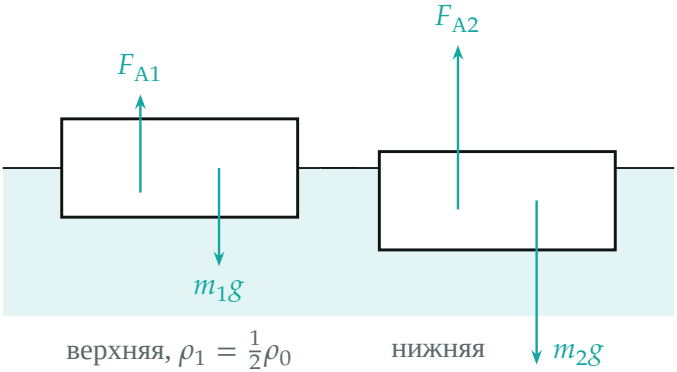
2. Верхняя половина. Плотность убывает с высотой, поэтому более лёгкая половина — верхняя. Она плавает, погрузившись наполовину:

$$\rho_1 g \frac{V}{2} = \rho_0 g \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{1}{2}\rho_0.$$

3. Нижняя половина. Масса целого бруска — сумма масс половин, $\rho V = \rho_1 \frac{V}{2} + \rho_2 \frac{V}{2}$, то есть средняя плотность бруска — среднее арифметическое плотностей половин:

$$\rho_2 = 2\rho - \rho_1 = \frac{4}{3}\rho_0 - \frac{1}{2}\rho_0 = \frac{5}{6}\rho_0.$$

Знак словами: $\rho_2 < \rho_0$, поэтому нижняя половина тоже плавает — погружённой на $5/6$ своего объёма.

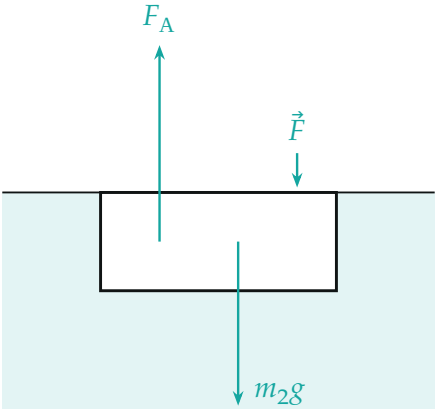


Половины по отдельности: верхняя погружена наполовину, нижняя — на $5/6$*; силы в масштабе (нижняя тяжелее в* $5/3$ *раза)*

4. Сила, чтобы утопить нижнюю половину. Будем медленно давить на брусок вниз вертикальной силой F. По мере погружения сила Архимеда растёт, и наибольшая сила нужна, когда брусок ушёл под воду целиком; меньшей силой его не утопить, а такой — достаточно. Вертикальная сила — наименьшая: наклонная тратила бы часть себя впустую на горизонтальную составляющую. Условие равновесия полностью погружённой половины:

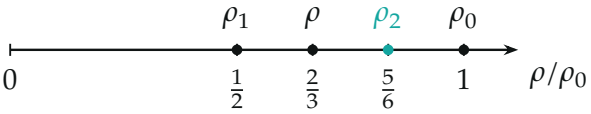
$$F + m_2 g = \rho_0 g \frac{V}{2}, \qquad m_2 = \rho_2 \frac{V}{2} = \frac{5}{6}\rho_0 \frac{V}{2} = \frac{5}{12}\rho_0 V.$$

$$F = \rho_0 g \frac{V}{2} - \frac{5}{12}\rho_0 g V = \frac{1}{12}\rho_0 g V = \frac{1}{12} \cdot \frac{3m}{2} g = \frac{mg}{8}.$$



Нижняя половина целиком под водой: $F + m_2 g = F_A$; стрелки 12 : 10 : 2

5. Сводка плотностей. Удобно увидеть все средние плотности на одной шкале: верхняя половина $\frac{1}{2}\rho_0$, весь брусок $\frac{2}{3}\rho_0$ (ровно посередине между половинами), нижняя $\frac{5}{6}\rho_0$ — всё ещё легче воды.



Средние плотности: ρ — середина отрезка между ρ_1 и ρ_2; $\rho_2 < \rho_0$, нижняя половина плавает

Обратите внимание. Нельзя считать, что нижняя половина «тяжёлая и тонет», раз плотность растёт вниз: важна только её *средняя* плотность, а она получилась $\frac{5}{6}\rho_0 < \rho_0$.

Проверка. Размерность: $[F] = [mg]$, ньютоны. Второй способ через массы: $m_1 = \rho_1 \frac{V}{2} = \frac{1}{4}\rho_0 V = \frac{3}{8}m$, $m_2 = m - m_1 = \frac{5}{8}m$; объём половины в воде вытесняет воду массой $\frac{1}{2}\rho_0 V = \frac{3}{4}m$, и $F = (\frac{3}{4} - \frac{5}{8})mg = \frac{mg}{8}$ — то же.

Ответ. Нижняя половина будет плавать (её средняя плотность $\frac{5}{6}\rho_0$); чтобы утопить её, нужна минимальная сила $F = \dfrac{mg}{8}$, направленная вертикально вниз.