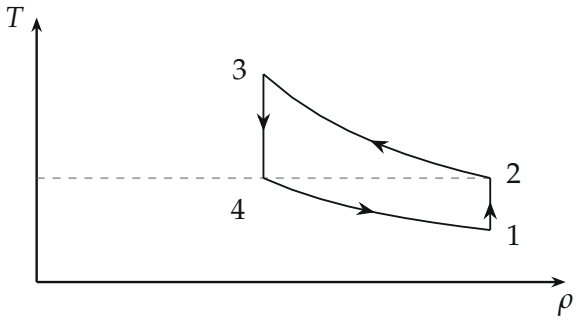
Цикл одноатомного газа $T(\rho)$

Задача 4. [Росатом 2018/19, 10 класс, задача 4] С некоторым количеством одноатомного идеального газа проводят циклический процесс 1-2-3-4-1. График зависимости абсолютной температуры газа от его плотности приведен на рисунке. На участках 1-2 и 3-4 зависимости изображаются на графике вертикальными прямыми, на участках 2-3 и 4-1 температура обратно пропорциональна плотности. Известно также, что температуры газа в состояниях 2 и 4 равны друг другу и абсолютная температура в состояниях 2 и 4 вдвое больше абсолютной температуры в состоянии 1. Известно также, что в течение цикла газ получает от нагревателя количество теплоты Q, а частота повторения циклов ν. Найти мощность двигателя, работающего по данному циклу.



▲ **Решение. Что происходит.** Плотность газа $\rho = m/V$ — это обратный объём, а уравнение Менделеева — Клапейрона в «плотностной» форме $p = \dfrac{\rho RT}{M}$ показывает, что $T \propto 1/\rho$ означает $p = \text{const}$. Значит, цикл состоит из двух изохор и двух изобар — в координатах p–V это прямоугольник. Мощность — работа за цикл, умноженная на число циклов в секунду; работу находим как КПД цикла, умноженный на Q. Класс задачи — первое начало термодинамики для цикла и КПД тепловой машины.

Обозначения. p_1, V_1, T_1 — параметры состояния 1; A — работа газа за цикл; Q_{12}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{41} — теплоты на участках; η — КПД; N —

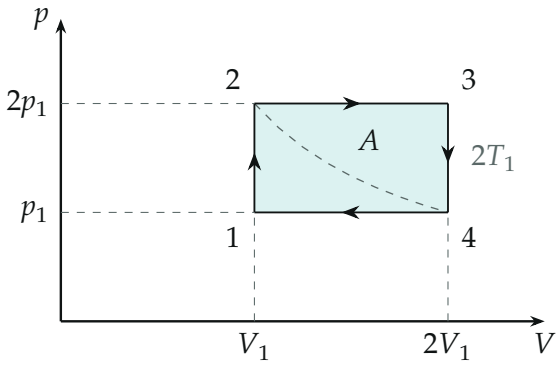
мощность. Буква ν занята частотой, поэтому количество вещества не вводим: везде, где оно нужно, стоит произведение pV.

1. Какие это процессы. На участках 1-2 и 3-4 плотность постоянна, значит, постоянен и объём — это изохоры. На участках 2-3 и 4-1 $\rho T = \text{const}$, и из $p = \rho RT/M$ давление постоянно — это изобары.

2. Параметры всех состояний. Изохора 1-2: температура выросла вдвое, $T_2 = 2T_1$, значит, и давление: $p_2 = 2p_1$, $V_2 = V_1$. Изобара 4-1: $p_4 = p_1$, а $T_4 = 2T_1$, поэтому объём вдвое больше: $V_4 = 2V_1$. Состояние 3 лежит на изобаре 2-3 ($p_3 = 2p_1$) и на изохоре 3-4 ($V_3 = 2V_1$):

$$T_3 = T_1 \cdot \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1} = 4T_1.$$

Сводка: 1 (p_1, V_1, T_1), 2 $(2p_1, V_1, 2T_1)$, 3 $(2p_1, 2V_1, 4T_1)$, 4 $(p_1, 2V_1, 2T_1)$.



Тот же цикл в координатах p–V: прямоугольник; пунктир — изотерма $2T_1$ через точки 2 и 4; площадь — работа

3. Работа за цикл. Работа газа за цикл равна площади цикла в координатах p–V:

$$A = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = (2p_1 - p_1)(2V_1 - V_1) = p_1 V_1.$$

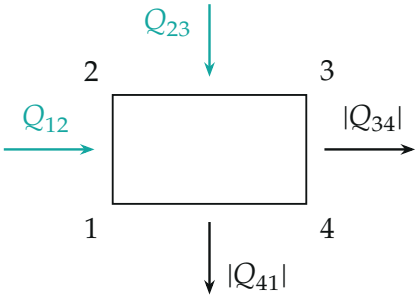
4. Где газ получает тепло. Первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A_{\text{газа}}$ для каждого участка; внутренняя энергия одноатомного газа $U =$

$\frac{3}{2}pV$:

$$Q_{12} = \tfrac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1 = \tfrac{3}{2}p_1V_1 > 0,$$
$$Q_{23} = \tfrac{3}{2}p_2(V_3 - V_2) + p_2(V_3 - V_2) = \tfrac{5}{2}\cdot 2p_1V_1 = 5p_1V_1 > 0,$$
$$Q_{34} = \tfrac{3}{2}(p_1 - 2p_1)\cdot 2V_1 = -3p_1V_1 < 0,$$
$$Q_{41} = \tfrac{3}{2}p_1(V_1 - 2V_1) + p_1(V_1 - 2V_1) = -\tfrac{5}{2}p_1V_1 < 0.$$

Знак словами: на 1-2 газ нагревается при постоянном объёме, на 2-3 расширяется с нагреванием — тепло получает; на 3-4 и 4-1 остывает — отдаёт. От нагревателя газ получает

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \frac{13}{2}\,p_1V_1.$$



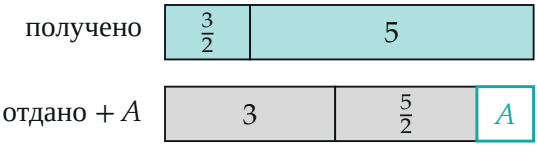
Тепло газ получает на участках 1-2 и 2-3 (бирюза), отдаёт — на 3-4 и 4-1

5. КПД и мощность. КПД — доля полученной теплоты, превращённая в работу:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{p_1V_1}{\frac{13}{2}p_1V_1} = \frac{2}{13}, \qquad A = \eta Q = \frac{2}{13}\,Q.$$

За секунду совершается ν циклов, поэтому мощность — работа в единицу времени:

$$N = A\nu = \frac{2}{13}\,Q\nu.$$



Баланс энергии за цикл в единицах p_1V_1: получено $\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}$, отдано $3+\frac{5}{2}$, остаток $A=1$

Обратите внимание. Q в условии — только полученная от нагревателя теплота (участки 1-2 и 2-3), а не алгебраическая сумма по циклу: сумма всех теплот равна работе A. На участке 2-3 теплота считается с работой газа, поэтому коэффициент $\frac{5}{2}$, а не $\frac{3}{2}$.

Проверка. Размерность: $[Q\nu] = \text{Дж}\cdot\text{с}^{-1} = \text{Вт}$. Баланс: $\frac{13}{2}-3-\frac{5}{2}=1=A/(p_1V_1)$ — первое начало для цикла выполнено. КПД Карно между T_1 и $4T_1$ равен $\frac{3}{4}$, наш $\frac{2}{13}\approx 0{,}15$ меньше — так и должно быть.

Ответ. $N=\dfrac{2}{13}\,Q\nu$.