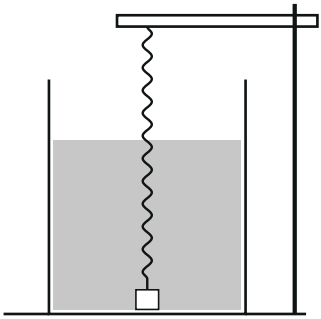
Резиновый жгут и вода

Задача 5. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 10 класс, задача 5] В цилиндрическом стакане лежит небольшое массивное тело, прикрепленное к резиновому жгуту с коэффициентом жесткости $k = 100$ Н/м. Второй конец жгута прикреплен к лапке штатива на расстоянии $l = 1$ м от дна стакана. Известно, что в этом положении жгут растянут на $\Delta l = 20$ см. В стакан очень медленно наливают холодную воду, и по мере охлаждения резины ее жесткость увеличивается. Причем известно, что если весь жгут охладить до данной температуры, его жесткость будет равна $4k$. При какой высоте столба жидкости в стакане груз оторвется от дна? Масса груза $m = 4$ кг, силой Архимеда пренебречь. Считать, что температура резины, опущенной в воду, равна температуре воды; температура резины, не находящейся в воде, равна температуре воздуха.



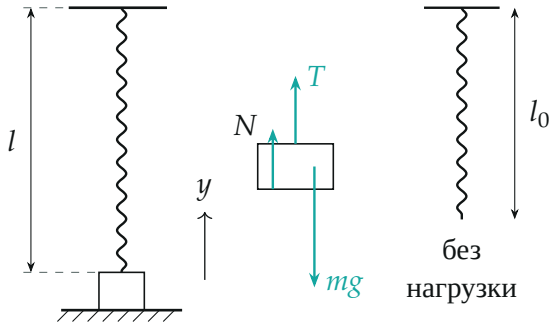
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равновесие груза, подвешенного на жгуте, жёсткость которого меняется по длине. Концы жгута закреплены: верхний — на лапке, нижний — на грузе, лежащем на дне, поэтому длина растянутого жгута всё время равна l. Вода охлаждает нижний участок жгута, этот участок становится жёстче и при той же общей длине натягивается сильнее — сила натяжения растёт. Груз оторвётся, когда сила натяжения дорастёт до mg. Главная идея: жгут — это две последовательные пружины (тёплая над водой и холодная в воде), натяжение в них одно и то же, а сумма их *недеформированных* длин — длина недеформированного жгута.

Обозначения. l_0 — длина недеформированного жгута; h — искомая высота воды; l_1, l_2 — недеформированные длины участков жгута над водой и под водой в момент отрыва; k_1, k_2 — жёсткости этих участков; T — сила натяжения жгута; $g = 10$ м/с^2.

1. Длина жгута без нагрузки. Сейчас жгут длиной l растянут на Δl, значит

$$l_0 = l - \Delta l = 1\text{ м} - 0{,}2\text{ м} = 0{,}8\text{ м}.$$

Сила натяжения до того, как налили воду, $T_0 = k\Delta l = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ Н меньше $mg = 40$ Н: груз лежит на дне, и дно давит на него вверх с силой $N = mg - T_0 = 20$ Н. Запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на вертикальную ось y вверх: $T + N - mg = 0$. Пока вода прибывает, T растёт, N уменьшается; отрыв — момент, когда $N = 0$, то есть $T = mg$.



Слева — жгут с грузом на дне, в середине — силы на груз; справа — тот же жгут без нагрузки: $l_0 = l - \Delta l$

2. Жёсткость куска жгута. Кусок жгута с недеформированной длиной l_1 — это доля l_1/l_0 всего жгута. При той же силе каждый сантиметр жгута растягивается одинаково, поэтому удлинение куска в l_0/l_1 раз меньше, чем у всего жгута, а жёсткость во столько же раз больше:

$$k_1 = k\,\frac{l_0}{l_1}\ \text{(тёплый кусок)}, \qquad k_2 = 4k\,\frac{l_0}{l_2}\ \text{(холодный кусок)}.$$

Во второй формуле стоит $4k$: так по условию жёсткость всего жгута, охлаждённого до температуры воды.

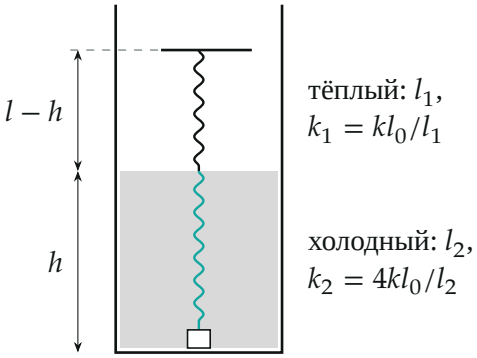
3. Длины участков в момент отрыва. Участки над водой и под водой — последовательные пружины: через любое сечение жгута передаётся одна и та же сила $T = mg$ (жгут лёгкий). Запишем закон Гука для участка над водой: его длина $l - h$ равна недеформированной длине плюс удлинение mg/k_1:

$$l - h = l_1 + \frac{mg}{k_1} = l_1\left(1 + \frac{mg}{kl_0}\right) \quad \Rightarrow \quad l_1 = \frac{l - h}{1 + \dfrac{mg}{kl_0}}.$$

То же для участка в воде, длина которого h:

$$h = l_2 + \frac{mg}{k_2} = l_2\left(1 + \frac{mg}{4kl_0}\right) \quad \Rightarrow \quad l_2 = \frac{h}{1 + \dfrac{mg}{4kl_0}}.$$

Числа: $\dfrac{mg}{kl_0} = \dfrac{40}{80} = 0{,}5$, $\dfrac{mg}{4kl_0} = 0{,}125$. Под нагрузкой mg тёплая резина растянута в 1,5 раза, холодная — в 1,125 раза.



Момент отрыва: жгут — две последовательные пружины с одной силой натяжения mg

4. Уравнение для h. Недеформированные длины участков в сумме дают недеформированную длину всего жгута, сколько бы воды ни налили:

$$l_1 + l_2 = l_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{l - h}{1{,}5} + \frac{h}{1{,}125} = 0{,}8 \text{ м}.$$

Умножим на 9: $6(l-h)+8h=7{,}2$ м, откуда $2h=7{,}2-6=1{,}2$ м и

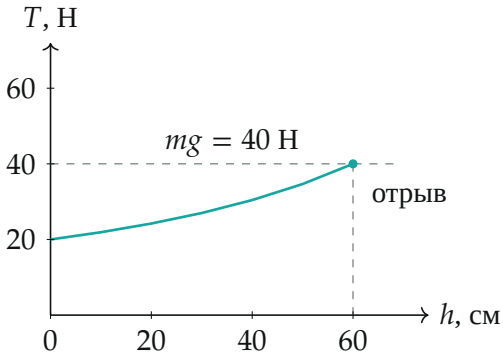
$$h=0{,}6\text{ м}=60\text{ см}.$$

В общем виде из того же уравнения

$$h=\frac{4kl_0}{3mg}\Big(1+\frac{mg}{4kl_0}\Big)\Big(\frac{mg}{k}-\Delta l\Big)=\frac{4\cdot 80}{3\cdot 40}\cdot 1{,}125\cdot(0{,}4-0{,}2)\text{ м}=0{,}6\text{ м}.$$

Множитель $\dfrac{mg}{k}-\Delta l$ — насколько тёплому жгуту не хватает удлинения до натяжения mg; этот недостаток и «добирает» охлаждение.

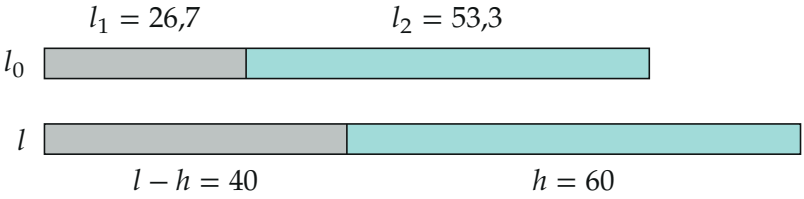
Обратите внимание: жёсткость участка зависит не от его длины в воде h, а от его *недеформированной* длины l_2. Именно поэтому неизвестных больше, чем кажется: l_1 и l_2 связывает только условие $l_1+l_2=l_0$.



Натяжение жгута при неподвижном грузе в зависимости от уровня воды (по точкам, найденным численно): от $k\Delta l=20$ Н до $mg=40$ Н при $h=60$ см

5. Проверка. Подставим $h=0{,}6$ м: $l_1=0{,}4/1{,}5=0{,}267$ м, $l_2=0{,}6/1{,}125=0{,}533$ м, сумма 0,8 м $=l_0$. Жёсткости $k_1=100\cdot 0{,}8/0{,}267=300$ Н/м, $k_2=400\cdot 0{,}8/0{,}533=600$ Н/м; удлинения $40/300=13{,}3$ см и $40/600=6{,}7$ см, вместе 20 см — ровно столько, сколько не хватает $l_0=80$ см до $l=100$ см. Размерность: $kl_0/(mg)$ безразмерно, $mg/k-\Delta l$ — длина. Предел: если бы холодная резина не становилась жёстче (вместо $4k$ было бы k), уравнение дало бы $l-h+h=1{,}5\,l_0$, то есть $1=1{,}2$ —

решения нет, груз не оторвётся при любом уровне воды, как и должно быть.



Длины участков в сантиметрах: тёплый растянут в 1,5 *раза, холодный — в* 1,125 *раза*

Смысл: холодная резина жёстче, поэтому при той же силе растягивается меньше; чем больше жгута в воде, тем меньше общее удлинение при силе mg, и при $h = 60$ см оно уменьшается до имеющихся 20 см.

Ответ. $h = \dfrac{4kl_0}{3mg}\left(1 + \dfrac{mg}{4kl_0}\right)\left(\dfrac{mg}{k} - \Delta l\right) = 60$ см, где $l_0 = l - \Delta l$.