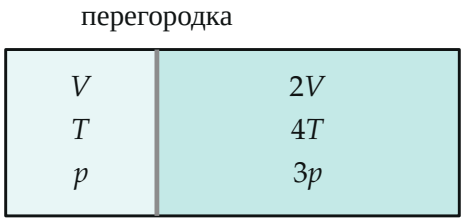
Смешение двух порций газа

Задача 1. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Сосуд разделен нетеплопроводящей перегородкой на два отсека. В первом отсеке объемом V находится идеальный газ при температуре T под давлением p. Во втором отсеке объемом $2V$ находится такой же идеальный газ при температуре $4T$ под давлением $3p$. Какие температура и давление установятся в сосуде, если убрать перегородку? Потерями энергии в окружающее пространство пренебречь.



Поясняющий рисунок: два отсека с одним и тем же газом, перегородка не проводит тепло

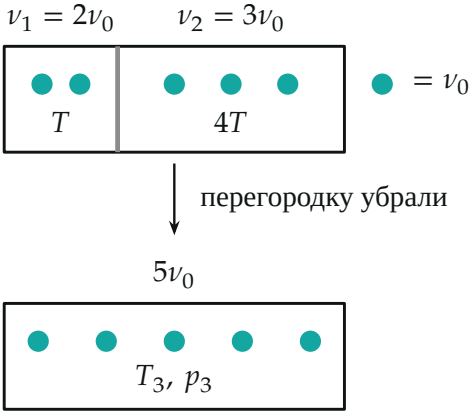
▲ **Решение. Что происходит.** Это смешение двух порций одного газа в закрытом теплоизолированном сосуде. После того как перегородку убрали, газ перемешивается и приходит в новое равновесие. Главная идея: сосуд ни с кем не обменивается теплотой и не совершает работы, поэтому *внутренняя энергия всего газа не меняется*, а количество вещества, конечно, тоже. Дальше остаётся записать эти два сохранения и добавить уравнение состояния для газа в объёме $3V$.

Обозначения. ν_1, ν_2 — число молей газа в первом и втором отсеках; T_3, p_3 — искомые температура и давление смеси; R — универсальная газовая постоянная; α — число, определяющее внутреннюю энергию одного моля газа: $U = \alpha\nu RT$ ($\alpha = 3/2$ для одноатомного газа, $5/2$ для двухатомного). Газ в обоих отсеках один и тот же, поэтому α одно и то же; в ответ оно не войдёт.

1. Что сохраняется. Запишем первое начало термодинамики для газа обоих отсеков вместе от момента, когда убрали перегородку, до установления равновесия: $\Delta U = Q + A_{\text{над газом}}$. Стенки сосуда нетеплопро-

водящие — потерь энергии нет, $Q = 0$. Стенки неподвижны, объём всего сосуда $3V$ не меняется, внешних тел газ не толкает, $A = 0$. Значит, $\Delta U = 0$: внутренняя энергия смеси равна сумме энергий двух порций до смешивания.

Обратите внимание: перемешивание — процесс неравновесный (струи, вихри), и о промежуточных состояниях ничего сказать нельзя. Но внутренняя энергия — функция состояния: нам нужны только начальное и конечное равновесные состояния, и выражение $U = \alpha\nu RT$ для них верно.



Число молей до и после: $\nu_1 : \nu_2 = 2 : 3$, *всего* $5\nu_0$, *где* $\nu_0 = pV/(2RT)$

2. Сколько молей в каждом отсеке. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для газа каждого отсека:

$$\nu_1 = \frac{pV}{RT} = 2\nu_0, \qquad \nu_2 = \frac{3p \cdot 2V}{R \cdot 4T} = \frac{3pV}{2RT} = 3\nu_0, \qquad \nu_0 = \frac{pV}{2RT}.$$

Во втором отсеке молей в полтора раза больше, чем в первом: объём там вдвое больше, давление втрое выше (произведение pV вшестеро больше), а температура вчетверо выше (делим на 4), так что $\nu \propto pV/T = 6/4 = 3/2$. После смешивания в сосуде $\nu_1 + \nu_2 = 5\nu_0$.

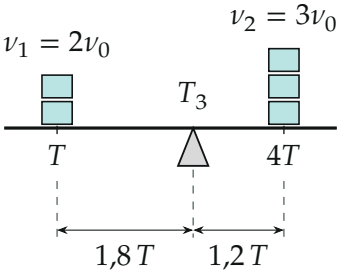
3. Конечная температура. Запишем закон сохранения энергии для газа обоих отсеков: энергия смеси при температуре T_3 равна сумме энергий порций:

$$\alpha\nu_1 RT + \alpha\nu_2 R \cdot 4T = \alpha(\nu_1 + \nu_2)RT_3.$$

Постоянные α и R сокращаются — поэтому знать атомность газа не нужно:

$$T_3 = \frac{\nu_1 T + \nu_2 \cdot 4T}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{2T + 3 \cdot 4T}{5} = \frac{14}{5} T = 2{,}8\, T.$$

Это среднее температур, взвешенное по числу молей — условие равновесия рычага: плечи обратно пропорциональны «массам» $\nu_1 : \nu_2 = 2 : 3$, то есть $3 : 2$.



Рычаг температур: точка опоры T_3 делит расстояние между T и $4T$ в отношении $1{,}8 : 1{,}2 = 3 : 2$ — обратно отношению числа молей

Обратите внимание: температуры нельзя просто усреднять — получилось бы $2{,}5\,T$. Вес каждой температуры — число молей, а оно во втором отсеке больше; поэтому смесь теплее, чем $2{,}5\,T$.

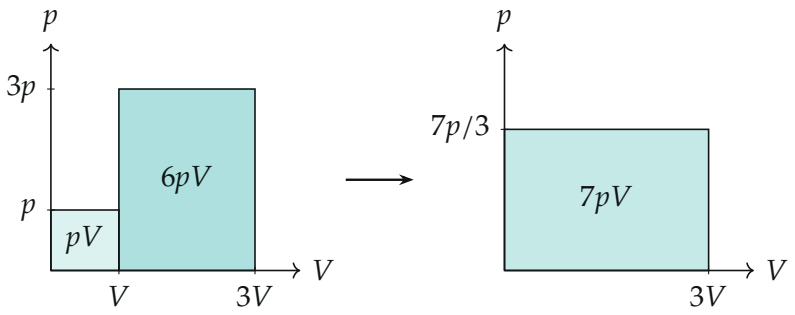
4. Конечное давление. Теперь газ занимает весь сосуд объёмом $3V$ при температуре T_3. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для всей смеси:

$$p_3 \cdot 3V = (\nu_1 + \nu_2) R T_3 = 5\nu_0 R \cdot \frac{14}{5} T = 14\,\nu_0 R T = 7\,pV \quad \Rightarrow \quad p_3 = \frac{7}{3} p.$$

5. То же давление вторым способом, не находя T_3. Из уравнения состояния $U = \alpha \nu R T = \alpha\, pV$: внутренняя энергия идеального газа пропорциональна произведению pV. Значит, сохранение энергии — это сохранение суммы pV по порциям:

$$p \cdot V + 3p \cdot 2V = p_3 \cdot 3V \quad \Rightarrow \quad 7pV = 3Vp_3 \quad \Rightarrow \quad p_3 = \frac{7}{3} p.$$

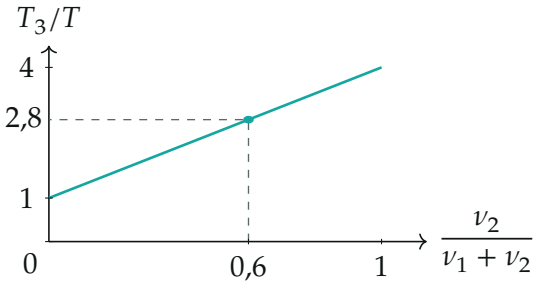
Давление — среднее давлений, взвешенное по объёмам отсеков. На рисунке сумма «площадей» pV до и после одна и та же.



Слева — «площади» pV двух порций, справа — смесь: $p_3 \cdot 3V = pV + 6pV$

Совпадение результатов двух способов проверяет и T_3: из $p_3 \cdot 3V = (\nu_1 + \nu_2)RT_3$ получается то же $14T/5$.

Проверка. Размерность: $\nu T/\nu$ — температура, pV/V — давление. Предельный случай: если бы в отсеках были одинаковые температуры и давления, смесь осталась бы такой же — формулы это дают. Знак: $T < T_3 < 4T$ и $p < p_3 < 3p$, как и положено среднему между двумя значениями; с ростом доли второго газа от 0 до 1 температура линейно идёт от T до $4T$, а у нас доля $3/5$.



Конечная температура как функция доли второго газа; наш случай — точка при $\nu_2/(\nu_1 + \nu_2) = 3/5$

Смысл: энергия и число частиц при смешивании не пропадают, поэтому температура усредняется по числу молей, а давление — по объёмам.

Ответ. $T_3 = \dfrac{14}{5}T; \quad p_3 = \dfrac{7}{3}p.$