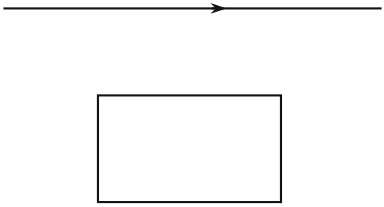
Рамка около провода с током

Задача 2. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Около очень длинного прямого провода, по которому течет постоянный ток, находится прямоугольная проводящая рамка. Длинная сторона рамки параллельна проводу. Если повернуть рамку на угол 180° вокруг дальней от провода стороны, по ней пройдет заряд q_1. Если рамку из исходного положения не поворачивая сдвинуть так, что ближняя к проводу сторона займет место дальней, по рамке пройдет заряд q_2. Какой заряд пройдет по рамке, если из первоначального положения унести ее на очень большое расстояние?



▲ **Решение. Что происходит.** Рамка движется в неоднородном магнитном поле провода, поток через неё меняется, в ней возникает ЭДС и течёт ток. Задача на заряд при электромагнитной индукции: ЭДС → ток в цепи → заряд. Главная идея: заряд, прошедший по рамке *за всё время*, определяется только тем, чему равен поток в начале и в конце, а не тем, как и как быстро рамку двигали. Поэтому три операции из условия различаются лишь конечным положением рамки; остаётся выразить конечные потоки через два неизвестных потока и исключить их.

Обозначения. R — сопротивление рамки; Φ_1 — магнитный поток через рамку в исходном положении; Φ_2 — поток через рамку после сдвига (ближняя сторона заняла место дальней), нормаль прежняя. Ширину рамки (расстояние между её длинными сторонами) обозначим b, расстояние от провода до ближней стороны — d. Нормаль $\vec{n}$ к рамке выберем по направлению поля в исходном положении, положительный ток — тот, что связан с $\vec{n}$ правилом правого винта; тогда $\Phi_1 > 0$. Заряд q считаем положительным, если он идёт в этом направлении.

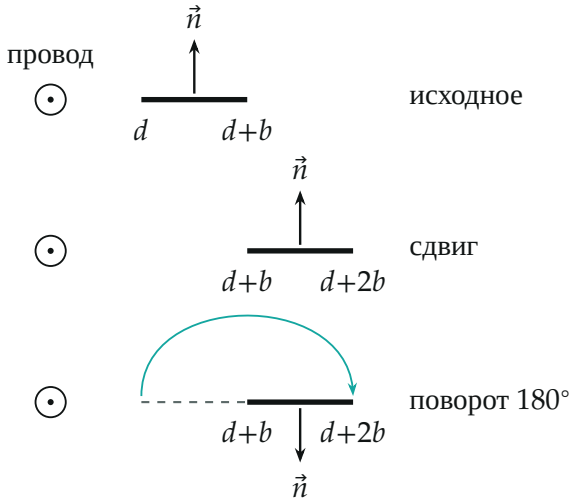
1. Заряд через изменение потока. По закону электромагнитной индукции ЭДС в рамке $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, по закону Ома для замкнутого контура ток $I = \mathcal{E}/R$. Рассмотрим малый промежуток времени dt, за который поток изменился на $d\Phi$: прошёл заряд

$$dq = I\,dt = -\frac{d\Phi}{R}.$$

Сложим такие заряды от начала движения до конца: сумма изменений потока — это просто разность конечного и начального потоков,

$$q = -\frac{\Phi_{\text{кон}} - \Phi_{\text{нач}}}{R}.$$

Обратите внимание: в формулу не вошли ни время, ни путь рамки. Поток при движении может меняться немонотонно, но складывается в итоге только разность его конечного и начального значений.



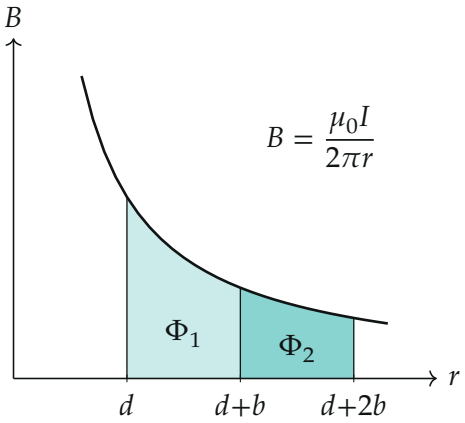
Вид вдоль провода: рамка видна как отрезок, поле провода направлено вдоль $\vec{n}$. Сдвиг и поворот приводят рамку в одно и то же место, но при повороте нормаль смотрит в противоположную сторону

2. Заряды в трёх опытах. Подставим в формулу из пункта 1 конечные потоки.

Сдвиг (заряд q_2). Рамка занимает место на b дальше от провода, нормаль та же, поток по условию равен Φ_2:

$$q_2 = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Здесь $\Phi_2 < \Phi_1$: поле провода слабеет с расстоянием, и тот же по площади участок поля дальше даёт меньший поток.



Поле провода и потоки: поток через полоску рамки — площадь под графиком $B(r)$ (в масштабе длины l рамки); рисунок построен для $d = b$

Поворот на 180° *вокруг дальней стороны* (заряд q_1). Рамка оказывается в том же месте, что и после сдвига, — дальняя сторона остаётся на расстоянии $d + b$ от провода, а ближняя, описав полуокружность, оказывается на расстоянии $d + 2b$, — но повёрнута к полю другой стороной: нормаль $\vec{n}$ сменила направление на противоположное. Поток через ту же область при противоположной нормали меняет знак, значит, $\Phi_{\text{кон}} = -\Phi_2$:

$$q_1 = -\frac{-\Phi_2 - \Phi_1}{R} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{R}.$$

Унесли на очень большое расстояние (заряд q_3). Поле провода убывает с расстоянием, площадь рамки ограничена, поэтому на очень боль-

шом расстоянии поток стремится к нулю, $\Phi_{\text{кон}} = 0$:

$$q_3 = -\frac{0 - \Phi_1}{R} = \frac{\Phi_1}{R}.$$

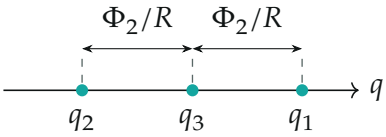
3. Исключаем неизвестные потоки. Неизвестных два, Φ_1 и Φ_2, а искомое q_3 содержит только Φ_1. Сложим выражения для q_1 и q_2: слагаемые с Φ_2 сокращаются,

$$q_1 + q_2 = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{R} + \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{2\Phi_1}{R} = 2q_3 \quad \Rightarrow \quad q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2}.$$

4. То же геометрически. Из пункта 2 следует

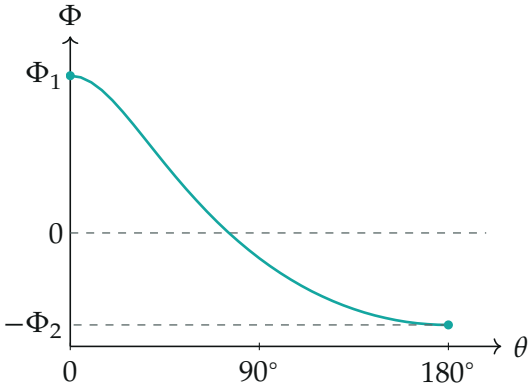
$$q_1 = q_3 + \frac{\Phi_2}{R}, \qquad q_2 = q_3 - \frac{\Phi_2}{R}:$$

два заряда лежат на числовой оси по обе стороны от q_3 на одном и том же расстоянии Φ_2/R, поэтому q_3 — середина отрезка между ними.



Три заряда на числовой оси: q_3 — посередине между q_2 и q_1

5. Как набирается заряд при повороте. Поворачиваем рамку на угол θ от 0 до 180°. По формуле пункта 1 заряд к моменту θ равен $(\Phi_1 - \Phi(\theta))/R$. На рисунке — поток $\Phi(\theta)$, посчитанный для $d = b$: он убывает монотонно, проходит через ноль примерно при 75° и в конце равен $-\Phi_2$. Значит, ток всё время течёт в одну сторону и заряд только растёт, пока не достигнет q_1.



Поток через рамку при её повороте на угол θ вокруг дальней стороны ($d = b$): от Φ_1 до $-\Phi_2$

Проверка. Явный пример: $d = b$, длина рамки l. Поток через полоску рамки между расстояниями r_a и r_b от провода (поле $B = \mu_0 I/(2\pi r)$):

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_b}{r_a}.$$

В единицах $\mu_0 I l/(2\pi)$ получаем $\Phi_1 = \ln 2 = 0{,}693$ и $\Phi_2 = \ln 1{,}5 = 0{,}405$. В единицах $\mu_0 I l/(2\pi R)$:

$$q_1 = \Phi_1 + \Phi_2 = 1{,}098, \quad q_2 = \Phi_1 - \Phi_2 = 0{,}288, \quad q_3 = \Phi_1 = 0{,}693,$$

$$\frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{1{,}098 + 0{,}288}{2} = 0{,}693 = q_3.$$

Предел: узкая рамка, $b \to 0$. При сдвиге поток почти не меняется, $q_2 \to 0$; при повороте поток меняет знак, $q_1 \to 2\Phi_1/R = 2q_3$; формула $q_3 = (q_1 + q_2)/2$ даёт $q_1/2 = q_3$ — верно. Размерность: Φ/R — вебер на ом, то есть кулон.

Смысл: заряд зависит только от начального и конечного потока, а поворот на 180° и сдвиг на b отличаются от ухода на бесконечность симметрично — на $\pm\Phi_2/R$.

Ответ. $q_3 = \dfrac{q_1 + q_2}{2}$.