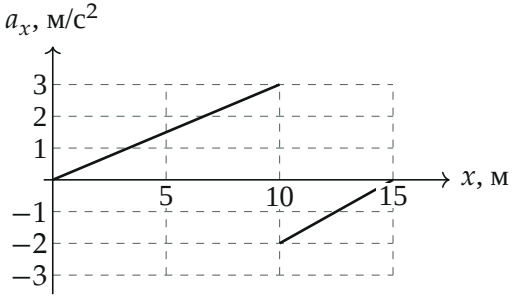
Ускорение, заданное графиком $a(x)$

Задача 3. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Тело движется в положительном направлении оси x с ускорением, график зависимости которого от координаты тела показан на рисунке. Найти скорость тела в тот момент времени, когда его координата равнялась $x = 6$ м, если начальная координата тела равнялась нулю, а начальная скорость — $v_0 = 5$ м/с.



▲ **Решение. Что происходит.** Ускорение задано как функция *координаты*, а не времени: чем дальше тело продвинулось, тем больше ускорение, пока $x < 10$ м. Движение не равноускоренное, формулы с постоянным a к нему применять нельзя, а времени мы не знаем. Главная идея: связать скорость с координатой без времени. На малом участке ускорение можно считать постоянным, и тогда изменение v^2 равно $2a\,\Delta x$; сложив такие изменения, получаем, что *изменение v^2 равно удвоенной площади под графиком $a(x)$*. Это теорема о кинетической энергии на единицу массы: $\Delta\left(v^2/2\right) = a\,\Delta x$.

Обозначения. $v_0 = 5$ м/с — скорость при $x_0 = 0$; v — искомая скорость при $x = 6$ м; a_n — ускорение на n-м малом участке Δx_n. Ось x направлена по движению, скорость положительна.

1. Малый участок. Разобьём путь на столь малые участки Δx_n, что на каждом из них ускорение a_n практически постоянно. Для равноускоренного движения со скоростью v_n в начале участка и v_{n+1} в конце связь между скоростями и перемещением (без времени)

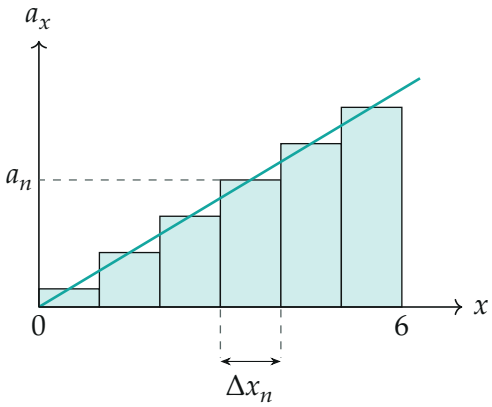
$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = 2a_n\,\Delta x_n.$$

Мы берём именно эту формулу, а не $v = v_0 + at$: время нам неизвестно, а координата известна.

2. Складываем по всем участкам. Запишем это равенство для каждого участка от $x = 0$ до $x = 6$ м и сложим. В левой части промежуточные v_n^2 входят дважды с разными знаками и сокращаются, остаются только конец и начало всего пути:

$$v^2 - v_0^2 = 2\,(a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \dots)\,.$$

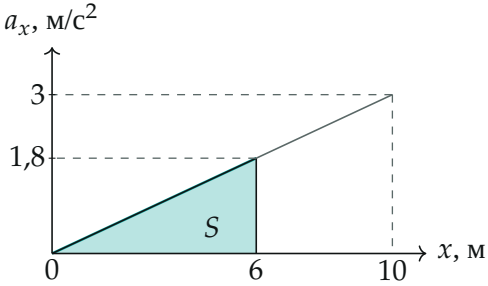
Сумма в скобках — сумма площадей узких столбиков высотой a_n и шириной Δx_n, то есть площадь S под графиком $a(x)$ от 0 до 6 м (в пределе $\Delta x_n \to 0$).



Площадь под графиком от 0 до 6 м, разбитая на узкие столбики; высота каждого — ускорение на своём участке

3. Площадь под графиком. До $x = 10$ м график — прямая, выходящая из начала координат: $a = 0{,}3\,x$ (при $x = 10$ м ускорение 3 м/с^2, значит, на каждый метр пути оно растёт на 0,3 м/с^2). При $x = 6$ м ускорение $a = 0{,}3 \cdot 6 = 1{,}8$ м/с^2. Площадь под графиком от 0 до 6 м — прямоугольный треугольник с основанием 6 м и высотой 1,8 м/с^2:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6\ \text{м} \cdot 1{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 5{,}4\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$



Треугольник под графиком $a(x)$ на участке $0\ldots6$ м: основание 6, высота 1,8

Обратите внимание: график дан до $x = 15$ м, но спрашивают скорость при $x = 6$ м, поэтому участок за 10 м, где ускорение отрицательно, и скачок ускорения при $x = 10$ м не нужны. Нужна именно площадь до 6 м. Второе: площадь даёт изменение v^2 (удвоенное), а не v: $v - v_0 \neq S$.

4. Скорость. Подставим площадь в равенство пункта 2:

$$v^2 = v_0^2 + 2S = (25 + 2 \cdot 5{,}4)\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = 35{,}8\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2},$$

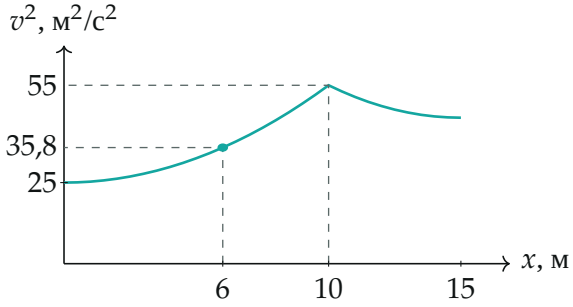
$$v = \sqrt{35{,}8}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 5{,}98\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тело ускорялось всё время, пока шло от 0 до 6 м, поэтому скорость выросла: $5{,}98 > 5$ м/с.

5. Тот же ответ вторым способом. На участке $0\ldots10$ м $a = kx$ с $k = 0{,}3$ с$^{-2}$. Ускорение — это $a = \dfrac{dv}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$, поэтому $v\,dv = kx\,dx$, то есть $d\left(\dfrac{v^2}{2}\right) = d\left(\dfrac{kx^2}{2}\right)$. Интегрируем от $x = 0$ до x:

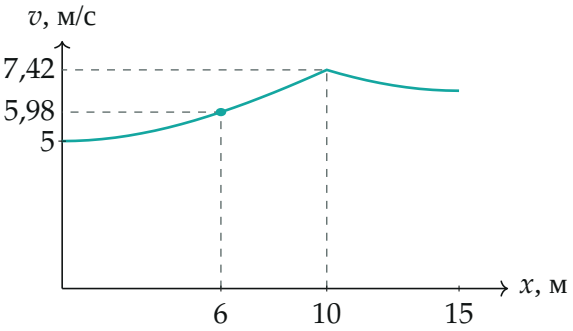
$$v^2 = v_0^2 + kx^2 = 25 + 0{,}3 \cdot 36 = 35{,}8\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Результат совпал с площадью. Заодно получаем $v^2(x)$ на всём пути: до 10 м это парабола, после 10 м ускорение отрицательно и v^2 убывает.



Квадрат скорости как функция координаты: $v^2 = 25 + 0{,}3\,x^2$ до 10 м, затем убывание; точка — ответ на $x = 6$ м

Проверка. Размерность: $a \cdot x$ — это (м/с^2)·м = м^2/с^2, как у v^2. Предел: при постоянном a_0 площадь равна $a_0 x$, и формула $v^2 = v_0^2 + 2a_0 x$ — обычная формула равноускоренного движения. Ещё одна проверка: ускорение росло линейно от 0 до 1,8 м/с^2, среднее 0,9 м/с^2, и $v^2 = 25 + 2 \cdot 0{,}9 \cdot 6 = 35{,}8$. Численное интегрирование уравнения движения $\dot{v} = a(x)$ даёт ту же скорость 5,98 м/с (время движения при этом около 1,13 с). Заодно картина скорости: она растёт до $x = 10$ м и после уменьшается.



Скорость тела как функция координаты: растёт до $x = 10$ м (там a меняет знак) и дальше убывает

Смысл: скорость определяется площадью под графиком $a(x)$, а не самим значением ускорения и не временем.

Ответ. $v = \sqrt{v_0^2 + 2S} = \sqrt{35{,}8}$ м/с $\approx 5{,}98$ м/с.