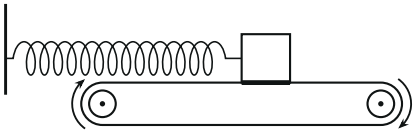
Тело на пружине и транспортёре

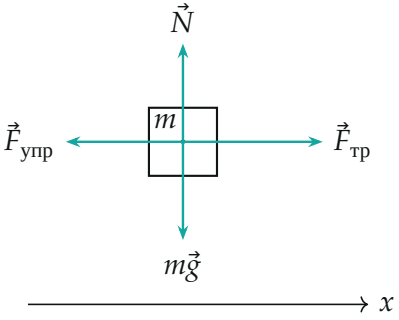
Задача 4. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Тело массой m прикреплено к пружине с жесткостью k, второй конец которой прикреплен к вертикальной стенке. Тело кладут на горизонтальную ленту транспортера, при этом пружина расположена горизонтально (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и лентой равен μ. В момент времени $t = 0$ лента начинает двигаться, при этом ее скорость возрастает по закону $v = at$. В результате действия сил трения и упругости тело начинает совершать колебания. Найти их амплитуду.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Лента разгоняется и трением тянет тело вперёд, пружина растягивается и тянет назад. Сначала, пока трения покоя хватает, тело едет вместе с лентой; если ускорение ленты велико или пружина растянулась достаточно, тело начинает проскальзывать. После этого сила трения скольжения μmg постоянна по величине и направлена вперёд, потому что лента всё время быстрее тела. Пружина и постоянная сила дают гармонические колебания с той же частотой, что и без трения, но около *сдвинутого* положения равновесия, где пружина растянута на $\mu mg/k$. Амплитуду определяют отклонение и скорость тела в момент, когда трение стало скользящим. Поэтому разбираем два случая: $a \geq \mu g$ (скольжение с самого начала) и $a < \mu g$ (сначала тело едет вместе с лентой).

Обозначения. Ось x направлена вдоль движения ленты, начало — там, где пружина не деформирована, x — растяжение пружины. $\omega = \sqrt{k/m}$ — частота колебаний на пружине; $x_0 = \mu mg/k$ — растяжение, при котором сила упругости уравновешивает трение скольжения; $\xi = x - x_0$ — отклонение от этого положения; x_s, t_s, v_s — растяжение, время и скорость тела в момент начала проскальзывания (для случая $a < \mu g$).

1. Силы на тело. Тело движется вдоль горизонтальной ленты, поэтому по вертикали сумма сил равна нулю: $N = mg$. По оси x на тело действуют сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$ (назад, пока пружина растянута) и сила трения $F_{\text{тр}}$ со стороны ленты. Предельное значение трения — $\mu N = \mu mg$.



Силы на тело: вертикальные уравновешены, вдоль оси x — упругость назад и трение вперёд

2. Когда тело держится на ленте. Пока тело не проскальзывает, оно движется с ускорением ленты a. Второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$F_{\text{тр}} - kx = ma \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}} = ma + kx.$$

Это трение покоя, и оно не может превышать μmg. В самом начале, при $x = 0$, нужно $F_{\text{тр}} = ma$. Если $a \geq \mu g$, трения не хватает уже в первое мгновение: тело проскальзывает с самого начала. Если $a < \mu g$, тело едет с лентой, пока растяжение не вырастет до значения, при котором $ma + kx = \mu mg$.

Случай $a \geq \mu g$.

3. Скольжение с начала и амплитуда. Тело отстаёт от ленты (проверка — в конце пункта), трение скольжения направлено вперёд и равно μmg. Второй закон Ньютона для тела в проекции на ось x:

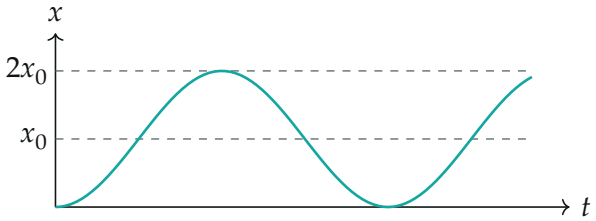
$$m\ddot{x} = \mu mg - kx \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\xi} = -k\xi, \qquad \xi = x - x_0, \quad x_0 = \frac{\mu mg}{k}.$$

Постоянная сила только сдвигает положение равновесия в x_0. В момент

$t = 0$ тело покоится при $x = 0$, то есть при $\xi = -x_0$ и $\dot{\xi} = 0$. Значит, колебания $\xi = -x_0 \cos \omega t$ и амплитуда равна начальному отклонению:

$$A = x_0 = \frac{\mu m g}{k}.$$

Проверка: тело отстаёт, так как $\dot{x} = \dfrac{\mu g}{\omega} \sin \omega t \le \mu g\, t < at$.



Растяжение пружины при $a \ge \mu g$: колебания $x = x_0(1 - \cos \omega t)$ около $x_0 = \mu m g / k$ с амплитудой x_0

Случай $a < \mu g$.

4. Тело едет вместе с лентой. Пока нет проскальзывания, тело движется с ускорением a из состояния покоя: $x = at^2/2$, $v = at$. Проскальзывание начнётся, когда необходимое трение покоя достигнет предела: $ma + kx_s = \mu m g$, откуда

$$x_s = \frac{m(\mu g - a)}{k} = x_0 - \frac{ma}{k}.$$

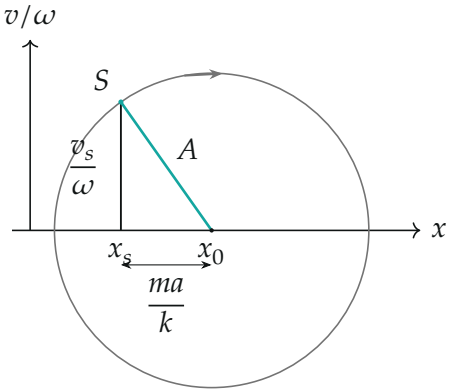
Время до этого момента и скорость тела найдём из формул равноускоренного движения: $x_s = at_s^2/2$, поэтому

$$t_s = \sqrt{\frac{2x_s}{a}}, \qquad v_s = at_s = \sqrt{2ax_s} = \sqrt{\frac{2ma(\mu g - a)}{k}}.$$

5. После начала проскальзывания. Дальше тело отстаёт от ленты, и сила трения скольжения постоянна, $\mu m g$ вперёд. Движение описывается тем же уравнением, что и в случае 1: $m\ddot{\xi} = -k\xi$, гармонические колебания около x_0 с частотой ω. Начальные условия — состояние в

момент t_s:

$$\xi_s = x_s - x_0 = -\frac{ma}{k}, \qquad \dot\xi_s = v_s.$$



Фазовая плоскость $(x,\ v/\omega)$: движение по окружности радиусом A около x_0; S — начало скольжения, катеты ma/k и v_s/ω, гипотенуза — амплитуда

Обратите внимание: почему тело действительно отстаёт от ленты. Время τ отсчитаем от t_s. Решение уравнения колебаний с этими условиями даёт скорость тела $\dot\xi = v_s\cos\omega\tau + \dfrac{a}{\omega}\sin\omega\tau$. Скорость ленты в тот же момент $v_s + a\tau$. Разность скорости тела и ленты

$$u = v_s(\cos\omega\tau - 1) + a\left(\frac{\sin\omega\tau}{\omega} - \tau\right) \le 0,$$

потому что $\cos\omega\tau \le 1$ и $\sin\omega\tau \le \omega\tau$. Тело никогда не обгонит ленту, трение скольжения действительно направлено вперёд и постоянно.

6. Амплитуда. Для гармонических колебаний $\xi = A\cos(\omega t + \varphi)$ верно $\xi^2 + (\dot\xi/\omega)^2 = A^2$ в любой момент (это закон сохранения энергии $kA^2/2 = k\xi^2/2 + m\dot\xi^2/2$, поделённый на $k/2$). Возьмём момент начала скольжения:

$$A^2 = \xi_s^2 + \frac{v_s^2}{\omega^2} = \left(\frac{ma}{k}\right)^2 + \frac{2ma(\mu g - a)}{k}\cdot\frac{m}{k},$$

$$A^2 = \frac{m^2}{k^2}\left(a^2 + 2a\mu g - 2a^2\right) = \frac{m^2 a\,(2\mu g - a)}{k^2} \;\Rightarrow\; A = \frac{m\sqrt{a\,(2\mu g - a)}}{k}.$$

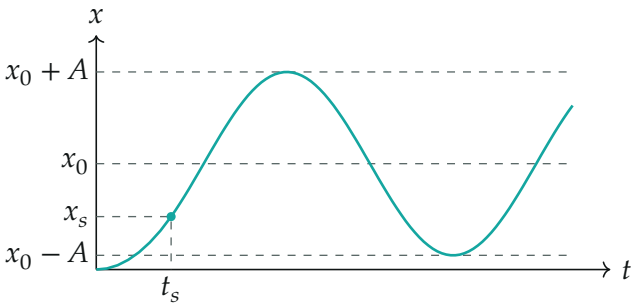
7. Второй способ: закон изменения энергии. Запишем для тела и пружины изменение механической энергии между моментом начала проскальзывания (растяжение x_s, скорость v_s) и моментом остановки тела (растяжение y, скорость нуль); оно равно работе силы трения скольжения μmg на пути $y - x_s$:

$$\frac{ky^2}{2} - \left(\frac{mv_s^2}{2} + \frac{kx_s^2}{2}\right) = \mu mg\,(y - x_s).$$

Подставим x_s и v_s из пункта 4: получается квадратное уравнение

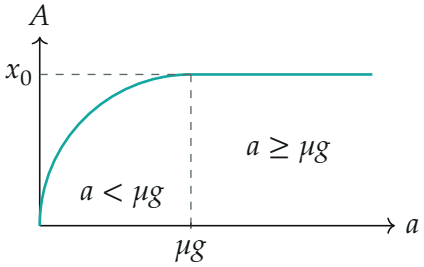
$$\frac{ky^2}{2} - \mu mg\,y + \frac{m^2(\mu g - a)^2}{2k} = 0, \qquad y = \frac{\mu mg}{k} \pm \frac{m\sqrt{a\,(2\mu g - a)}}{k}.$$

Корни — два крайних положения тела по обе стороны от x_0; расстояние от x_0 до каждого — амплитуда, та же, что в пункте 6.



Растяжение пружины при $a = 0{,}5\,\mu g$: сначала $x = at^2/2$ вместе с лентой до момента t_s, затем колебания около x_0 с амплитудой $0{,}87\,\mu mg/k$

8. Зависимость амплитуды от ускорения ленты. Из пункта 6 при $s = a/(\mu g) < 1$ получаем $A^2/x_0^2 = s(2-s) = 1 - (1-s)^2$, то есть $(A/x_0)^2 + (1-s)^2 = 1$ — четверть окружности. При $s \geq 1$ амплитуда постоянна, $A = x_0$. В точке $s = 1$ обе формулы дают одно и то же.



Амплитуда колебаний в зависимости от ускорения ленты ($x_0 = \mu mg/k$)

Проверка. Размерность: $m\sqrt{a\mu g}/k$ — килограмм на (м/с^2) и на (Н/м), то есть метры, как и $\mu mg/k$. Предельные случаи: при $a \to \mu g$ формула случая 2 переходит в $\mu mg/k$ — ответ случая 1; при $a \to 0$ амплитуда $\to 0$: лента почти не разгоняется, тело тихо доезжает до положения x_0, где трение скольжения уравновешено пружиной, и колебаний нет. Всегда $a(2\mu g - a) = \mu^2 g^2 - (\mu g - a)^2 \leq \mu^2 g^2$, поэтому $A \leq \mu mg/k$: быстрее лента — колебания не больше. Численно: при $a = 0{,}5\,\mu g$ амплитуда $0{,}866\,\mu mg/k$, и расчёт движения с переключением «вместе с лентой / скольжение» даёт крайние положения $1{,}866\,x_0$ и $0{,}134\,x_0$, то есть ту же амплитуду.

Смысл: после начала скольжения лента действует на тело постоянной силой, и амплитуду определяет только то, с каким отклонением и скоростью тело попало в этот режим.

Ответ. При $a \geq \mu g$: $A = \dfrac{\mu mg}{k}$; при $a < \mu g$: $A = \dfrac{m\sqrt{a\,(2\mu g - a)}}{k}$.