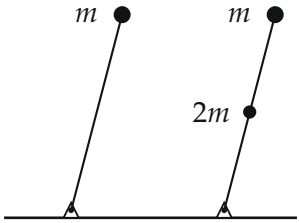
Падающий стержень с грузами

Задача 5. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 5] На конце невесомого стержня укреплено очень маленькое тело массой m. Второй конец стержня закреплен шарнирно на горизонтальной поверхности. Если расположить стержень под некоторым углом к вертикали, а затем отпустить, он будет падать на поверхность в течение времени t. Какое время будут падать на поверхность стержень, если к его середине прикрепить маленькое тело массы $2m$, расположить под таким же углом к поверхности и отпустить?



▲ **Решение. Что происходит.** Стержень падает, поворачиваясь вокруг шарнира; потенциальная энергия тел переходит в кинетическую. Время падения мы не умеем найти прямо, но можно сравнить два движения. Время поворота на малый угол $d\beta$ равно $dt = d\beta/\omega$, где ω — угловая скорость в этом положении, а полное время — сумма таких dt по всему повороту. Если во втором случае при каждом угле угловая скорость в одно и то же число раз больше, то и время падения во столько же раз меньше. Значит, надо найти угловую скорость стержня при произвольном угле из закона сохранения механической энергии: шарнир идеальный, его точка неподвижна, сила реакции работы не совершает.

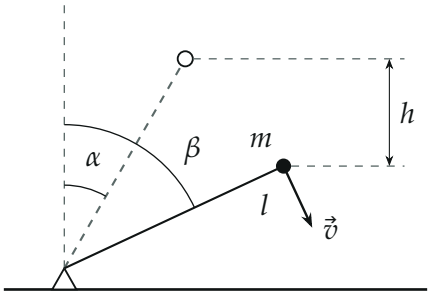
Условие «под таким же углом» понимаем как тот же начальный угол α с вертикалью, что и в первом опыте. В условии сначала сказано «к вертикали», потом «к поверхности» — это неточность: если бы начальные углы были разными, отношение времён зависело бы от неизвестного угла α и ответа в общем виде не было бы; так понимают и организаторы.

Обозначения. l — длина стержня; α — начальный угол стержня с вертикалью; β — угол с вертикалью в произвольный момент падения; ω

и ω_1 — угловые скорости первого стержня (тело m на конце) и второго (тело m на конце и $2m$ в середине) при угле β; t и t_1 — времена падения (от α до горизонтального положения, $\beta = 90°$); $\Delta = \cos\alpha - \cos\beta$.

1. Первый стержень. В начале стержень покоится, высота тела на конце $l\cos\alpha$. Пока стержень повернулся до угла β, тело опустилось на $h = l\,(\cos\alpha - \cos\beta) = l\Delta$. Скорость тела при вращении вокруг шарнира $v = \omega l$ (тело на расстоянии l от оси, скорость направлена перпендикулярно стержню). Закон сохранения механической энергии для тела и Земли:

$$mgl\Delta = \frac{m\omega^2 l^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{2g\Delta}{l}.$$



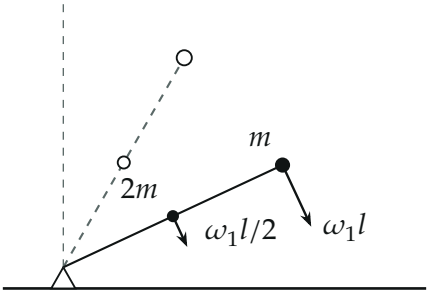
Первый стержень: начальное положение (штрих, светлый кружок) и положение при угле β; $h = l(\cos\alpha - \cos\beta)$ — опускание тела, $\vec{v}$ — его скорость

2. Второй стержень. Оба тела вращаются вместе со стержнем с одной угловой скоростью ω_1: тело m на расстоянии l имеет скорость $\omega_1 l$, тело $2m$ на расстоянии $l/2$ — скорость $\omega_1 l/2$. Тела опускаются на $l\Delta$ и $\frac{l}{2}\Delta$ соответственно. Закон сохранения механической энергии для обоих тел и Земли:

$$mgl\Delta + 2mg\,\frac{l}{2}\,\Delta = \frac{m(\omega_1 l)^2}{2} + \frac{2m(\omega_1 l/2)^2}{2}.$$

Слева $2mgl\Delta$, справа $\frac{m\omega_1^2 l^2}{2} + \frac{m\omega_1^2 l^2}{4} = \frac{3m\omega_1^2 l^2}{4}$:

$$2mgl\Delta = \frac{3m\omega_1^2 l^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{8g\Delta}{3l}.$$

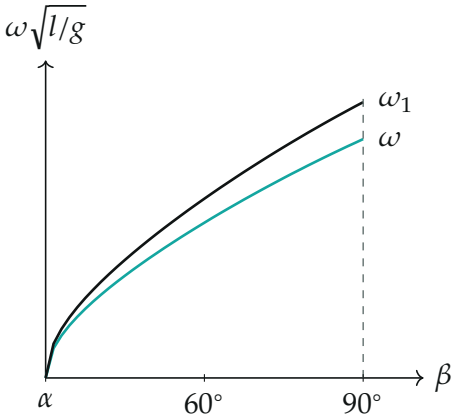


Второй стержень в том же положении: скорости тел пропорциональны расстояниям до шарнира

3. Сравниваем. Разделим ω_1^2 на ω^2:

$$\frac{\omega_1^2}{\omega^2} = \frac{8/3}{2} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\omega.$$

Отношение не зависит от угла β (и от g, l, m, α): Δ сократилась. Во втором случае при каждом угле стержень вращается быстрее в одно и то же число раз.



Угловая скорость как функция угла для $\alpha = 30°$: кривая второго стержня (ω_1) выше кривой первого (ω) в $2/\sqrt{3} \approx 1{,}155$ раза при каждом β

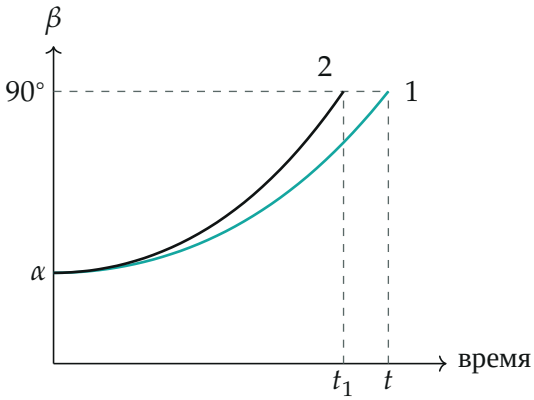
4. От скоростей к временам. Малый поворот на угол $d\beta$ первый стержень делает за $dt = d\beta/\omega$, второй — за $dt_1 = d\beta/\omega_1$. Отсюда при каждом угле

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Полное время падения — сумма всех dt по углам от α до $90°$, и в каждом слагаемом второе время в $\sqrt{3}/2$ раза меньше первого, значит и сумма меньше в то же число раз:

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,t.$$

Обратите внимание: в начале падения $\omega = 0$ и $dt = d\beta/\omega$ неограниченно велико, но слагаемое остаётся конечным — сумма сходится, время падения конечно. И то, что стержни падали из одного и того же угла, существенно: от него зависят сами t и t_1, но не их отношение.



Угол стержня в зависимости от времени для $\alpha = 30°$ (численный расчёт): 1 — первый стержень, 2 — второй; вторая кривая — та же, сжатая по времени в $2/\sqrt{3}$ раза

5. То же вторым способом: через моменты сил. Угловое ускорение стержня $\varepsilon = M/I$, где M — момент силы тяжести относительно шарнира, I — момент инерции. Для первого стержня $I = ml^2$, $M = mgl\sin\beta$;

для второго $I = ml^2 + 2m(l/2)^2 = \dfrac{3}{2}ml^2$, $M = mgl\sin\beta + 2mg\dfrac{l}{2}\sin\beta = 2mgl\sin\beta$. Значит,

$$\ddot\beta = \frac{g}{l}\sin\beta \quad \text{(первый)}, \qquad \ddot\beta = \frac{4}{3}\cdot\frac{g}{l}\sin\beta \quad \text{(второй)}.$$

Если $\beta(t)$ — решение первого уравнения, то $\beta(ct)$ — решение уравнения, где справа множитель c^2; при $c^2 = 4/3$ получается второе уравнение с теми же начальными условиями ($\beta = \alpha$, $\dot\beta = 0$). Второе падение — это первое, «проигранное быстрее» в $c = 2/\sqrt{3}$ раза; время короче в c раз: $t_1 = t/c = \sqrt{3}\,t/2$.

Проверка. Размерность: ответ — безразмерный множитель $\sqrt{3}/2$. Предельные случаи: если тело $2m$ посадить на самый конец, к телу m ($x = l$), то и энергия, и момент инерции пропорциональны суммарной массе, $\omega_1 = \omega$, $t_1 = t$; если посадить его на шарнир ($x = 0$), оно не движется и не влияет, $t_1 = t$ — в обоих случаях формулы, написанные для общего расстояния x тела $2m$ от шарнира,

$$\frac{\omega_1^2}{\omega^2} = \frac{1 + 2x/l}{1 + 2x^2/l^2},$$

дают единицу. Для $x = l/2$ получаем $\dfrac{2}{1{,}5} = \dfrac{4}{3}$, как и выше. Знак: при том же угле у второго стержня потенциальной энергии отдано вдвое больше, а момент инерции вырос лишь в 1,5 раза, поэтому он вращается быстрее и $t_1 < t$. Численное интегрирование уравнений движения для $\alpha = 30°$ даёт $t_1/t = 0{,}8660$, то есть $\sqrt{3}/2$.

Смысл: добавленное тело изменяет и движущую силу, и инерцию, но их отношение при любом положении стержня одно и то же, поэтому всё падение просто идёт быстрее в $2/\sqrt{3}$ раза.

Ответ. $t_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,t \approx 0{,}87\,t$.