Уголок из двух стержней на нитях

Задача 1. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Два однородных стержня длиной $3l$ и $4l$ и массой m и $3m$ соответственно сварены концами под прямым углом друг к другу. Сделанный таким образом «прямой угол» повешен на двух нитях одинаковой длины, которые в равновесии занимают вертикальное положение (см. рисунок). Найти отношение силы натяжения левой *[в оригинале фраза обрывается; по решению организаторов нужно найти отношение силы натяжения левой нити к силе натяжения правой]*

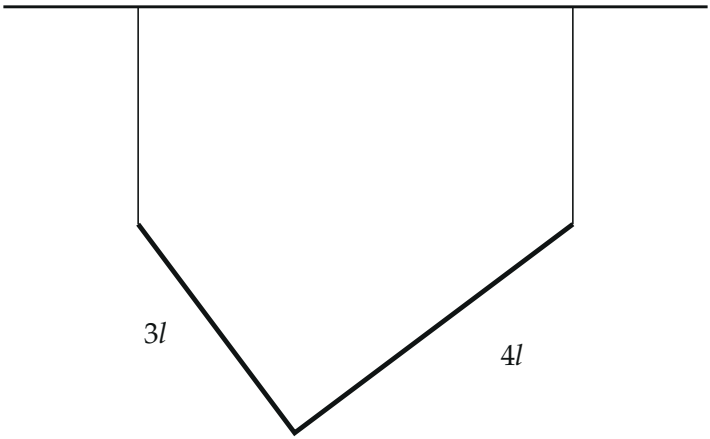
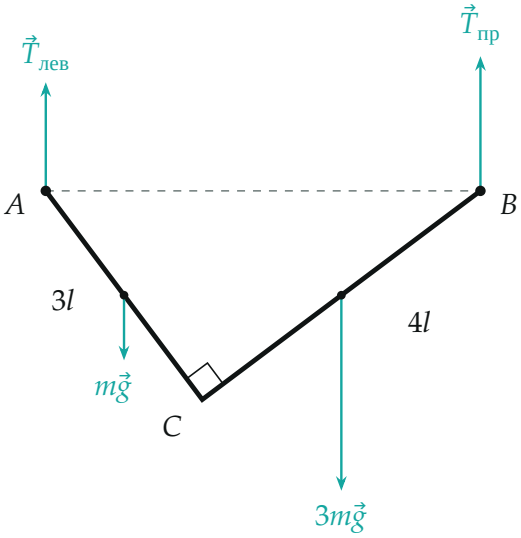


Рисунок условия: угол из двух стержней на двух вертикальных нитях

▲ **Решение. Что происходит.** Угол из двух сваренных стержней неподвижно висит на двух нитях. Это равновесие твёрдого тела под действием четырёх вертикальных сил: двух сил тяжести и двух натяжений. Равновесие требует двух условий: сумма сил равна нулю и сумма моментов относительно любой точки равна нулю. Неизвестных две — $T_{\text{лев}}$ и $T_{\text{пр}}$. Главная идея: взять моменты относительно точки крепления одной нити. Плечо её натяжения равно нулю, поэтому в уравнении остаётся одна неизвестная сила, и она находится сразу. Всё, что нужно для уравнений, — плечи сил тяжести, а их даёт геометрия угла.



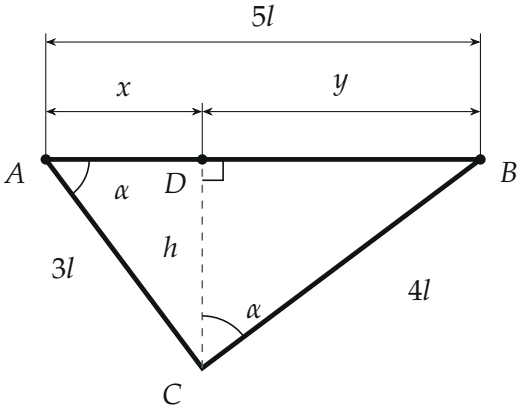
Силы, действующие на угол: натяжения нитей в точках A и B и силы тяжести стержней в их серединах

Обозначения. A и B — свободные концы стержней, к которым привязаны нити; C — вершина прямого угла; $AC = 3l$ (масса m), $CB = 4l$ (масса $3m$). $T_{\text{лев}}$ и $T_{\text{пр}}$ — натяжения нитей в точках A и B.

1. Положение угла. Нити одинаковой длины висят вертикально на горизонтальном потолке, значит, их нижние концы A и B на одной высоте: отрезок AB горизонтален. Треугольник ABC прямоугольный, и по теореме Пифагора $AB = \sqrt{(3l)^2 + (4l)^2} = 5l$. Это расстояние между нитями.

2. Плечи сил тяжести. Все четыре силы вертикальны, поэтому плечо каждой относительно точки A или B — её горизонтальное расстояние до этой точки, то есть расстояние между проекциями на прямую AB. Стержни однородные, сила тяжести каждого приложена в его середине. Опустим из C перпендикуляр CD на AB. Прямоугольные треугольники ACD и ABC подобны (угол A общий), поэтому

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \quad \Rightarrow \quad x = AD = \frac{(3l)^2}{5l} = \frac{9l}{5}, \qquad y = DB = 5l - x = \frac{16l}{5}.$$



Подобные треугольники ACD и ABC: проекция вершины C делит гипотенузу на отрезки x и y

Горизонтальные расстояния от середин стержней до концов A и B:

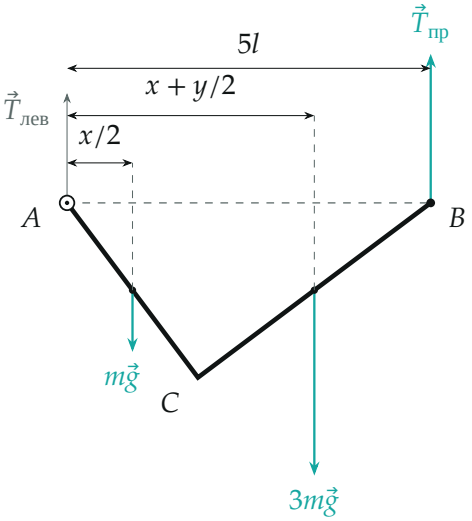
$$\text{середина } AC: \quad x/2 = \frac{9l}{10} \text{ от } A, \qquad y + x/2 = \frac{41l}{10} \text{ от } B;$$

$$\text{середина } CB: \quad x + y/2 = \frac{17l}{5} \text{ от } A, \qquad y/2 = \frac{8l}{5} \text{ от } B.$$

3. Моменты относительно точки A. Выберем ось в точке A: плечо $T_{\text{лев}}$ равно нулю, и эта сила в уравнение не входит. Сила $T_{\text{пр}}$ поворачивает угол против часовой стрелки, обе силы тяжести — по часовой. Сумма моментов равна нулю:

$$T_{\text{пр}} \cdot 5l = mg \cdot \frac{x}{2} + 3mg\left(x + \frac{y}{2}\right) = mg \cdot \frac{9l}{10} + 3mg \cdot \frac{17l}{5} = \frac{111}{10}\, mgl,$$

$$T_{\text{пр}} = \frac{111}{50}\, mg.$$

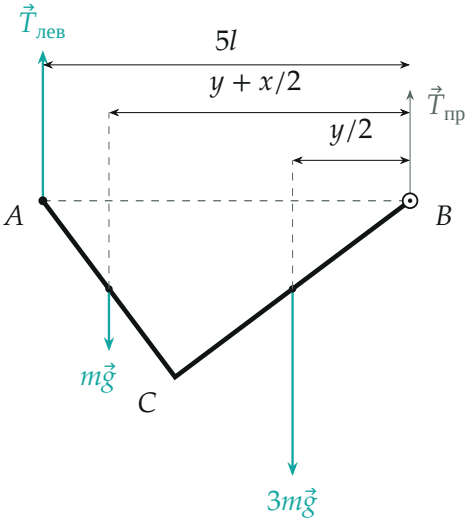


Ось в точке A: плечи сил $T_{пр}$, $3m\vec{g}$ и $m\vec{g}$ — отрезки $5l$, $x + y/2$ и $x/2$

4. Моменты относительно точки B. Теперь ось в B: выпадает $T_{\text{пр}}$. Сила $T_{\text{лев}}$ поворачивает угол по часовой стрелке, силы тяжести — против:

$$T_{\text{лев}} \cdot 5l = mg\left(y + \frac{x}{2}\right) + 3mg \cdot \frac{y}{2} = mg \cdot \frac{41l}{10} + 3mg \cdot \frac{8l}{5} = \frac{89}{10}\,mgl,$$

$$T_{\text{лев}} = \frac{89}{50}\,mg.$$



Ось в точке B: плечи сил $T_{лев}$, $m\vec{g}$ и $3m\vec{g}$ — отрезки $5l$, $y + x/2$ и $y/2$

5. Отношение. Разделим одно натяжение на другое: m, g и l сокращаются,

$$\frac{T_{\text{лев}}}{T_{\text{пр}}} = \frac{89/50}{111/50} = \frac{89}{111} \approx 0{,}80.$$

Правая нить натянута сильнее: центр тяжести угла смещён к правому стержню, он и длиннее, и втрое тяжелее.

Обратите внимание на два места. Первое: плечо силы тяжести — горизонтальное расстояние от оси до вертикали, проведённой через середину стержня ($x/2 = 9l/10$), а не половина длины стержня ($3l/2$). Второе: прямая AB горизонтальна только потому, что нити одинаковой длины и вертикальны. Будь одна нить короче, угол повернулся бы, и пришлось бы искать угол поворота из тех же уравнений.

Проверка. Размерность: T выражено через mg, значит, это сила. Первый способ, независимый от двух уравнений моментов: сумма сил по вертикали, $T_{\text{лев}} + T_{\text{пр}} = \dfrac{89 + 111}{50} mg = 4mg$ — это вес всего угла ($m + 3m$). Второй способ: заменим угол одной силой тяжести $4mg$, при-

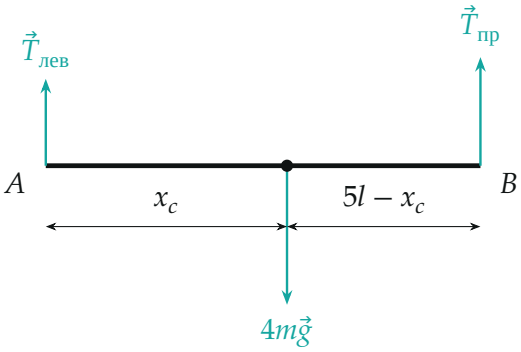
ложенной в общем центре тяжести. Он лежит на расстоянии

$$x_c = \frac{m \cdot \frac{9l}{10} + 3m \cdot \frac{17l}{5}}{4m} = \frac{111}{40}\, l = 2{,}775\, l$$

от A по горизонтали. Правило рычага: нить, дальняя от центра тяжести, натянута слабее, и натяжения обратно пропорциональны расстояниям до него:

$$\frac{T_{\text{лев}}}{T_{\text{пр}}} = \frac{5l - x_c}{x_c} = \frac{2{,}225}{2{,}775} = \frac{89}{111},$$

то же число.



Второй способ: стержни заменены одной силой $4m\vec{g}$ в общем центре тяжести, угол — рычаг AB

Смысл ответа: нагрузка угла распределяется между нитями как на рычаге — чем ближе центр тяжести к нити, тем сильнее она натянута.

Ответ. $\frac{T_{\text{лев}}}{T_{\text{пр}}} = \frac{89}{111} \approx 0{,}80$ (при этом $T_{\text{лев}} = \frac{89}{50}\, mg$, $T_{\text{пр}} = \frac{111}{50}\, mg$).