Система из 2019 блоков

Задача 3. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Имеется 2019 неподвижных и 2018 подвижных блоков, через которые переброшена невесомая, нерастяжимая веревка (см. рисунок). К осям подвижных блоков прикреплены 2018 тел массой m, к концам веревки — тела массой m и $m/2$. Найти величину и направление ускорения самого левого тела.

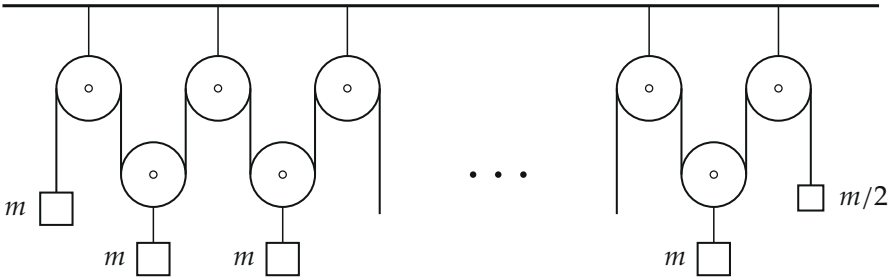
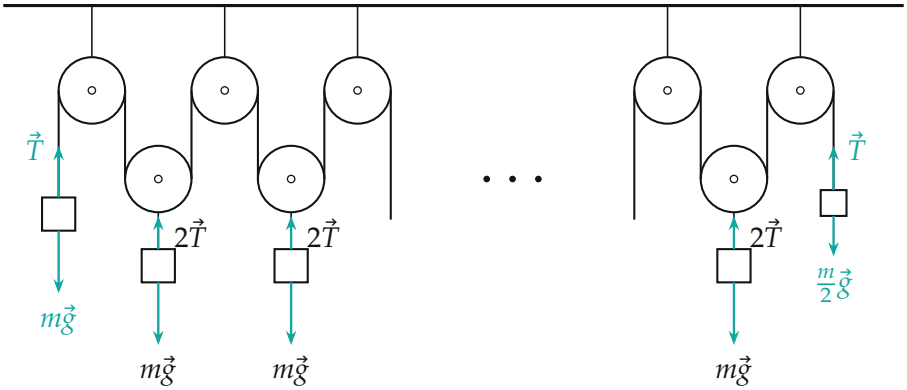


Рисунок условия: подвижные блоки с телами и неподвижные блоки на потолке; середина цепочки показана многоточием

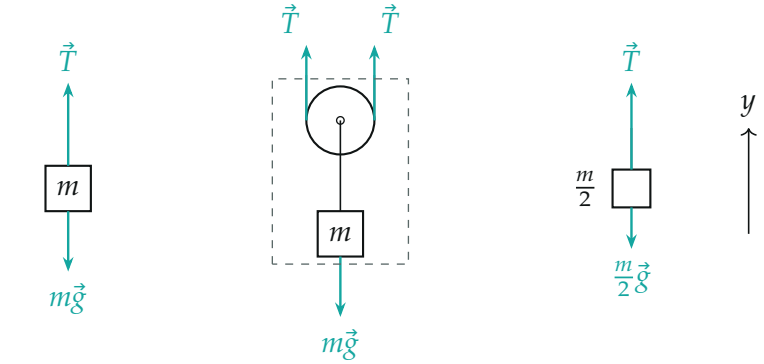
▲ **Решение. Что происходит.** Это система блоков с одной нерастяжимой верёвкой. Верёвка и блоки невесомы, трения нет, поэтому натяжение T одинаково на всей верёвке. Нижнее тело висит на оси подвижного блока, который держат два конца верёвки, так что вверх его тянет $2T$. Левое и правое тела держит один конец верёвки. Идея решения: законы Ньютона для трёх видов тел плюс связь ускорений из нерастяжимости верёвки. Качественно ответ почти очевиден. Чтобы нижние тела не двигались, нужно $2T = mg$; чтобы не двигалось правое тело, нужно $T = mg/2$. Оба условия дают $T = mg/2$. Значит, верёвка натянута примерно с силой $mg/2$, и левое тело, которое она держит с этой силой, опускается с ускорением около $(mg - mg/2)/m = g/2$. Остальные тела почти не движутся: чтобы левое тело сместилось на 1 см, они сместятся лишь на доли миллиметра. Найдём точный ответ.



Силы на телах: левое и правое тянет натяжение T, нижние — $2T$ (два конца верёвки на блоке)

Обозначения. T — натяжение верёвки; a_1 — модуль ускорения левого тела, a_2 — нижних тел, a_3 — правого. Ось y направим вертикально вверх, проекции ускорений на неё обозначим a_{1y}, a_{2y}, a_{3y}. Всего $N = 2018$ подвижных блоков.

1. Силы на тело с блоком. Блок невесом, поэтому сумма сил на него равна нулю: вниз его тянет нить к телу с силой S, вверх — два конца верёвки с силой T каждый, откуда $S = 2T$. Рассмотрим сразу нижнее тело вместе с блоком, это система с массой m: на неё действуют сила тяжести mg вниз и два натяжения T вверх.



левое тело тело с блоком правое тело

Силы на каждое из трёх тел; ось y вверх

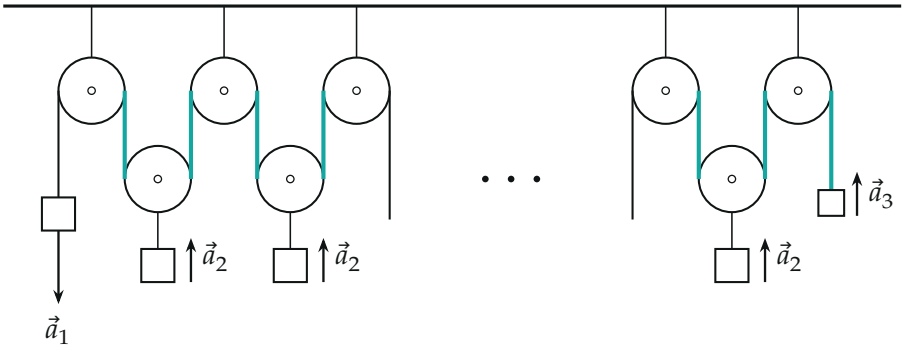
2. Законы Ньютона. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось y для левого тела, для нижнего тела с блоком и для правого тела:

$$ma_{1y} = T - mg, \qquad ma_{2y} = 2T - mg, \qquad \frac{m}{2}a_{3y} = T - \frac{mg}{2}.$$

Третье уравнение, умноженное на 2, совпадает со вторым: $ma_{3y} = 2T - mg$. Значит, $a_{3y} = a_{2y}$: правое тело и все нижние тела движутся с одним ускорением. Нижние тела одинаковы и висят на одной и той же верёвке, поэтому их ускорения совпадают тоже.

3. Связь ускорений. Длина верёвки постоянна. Пусть нижние тела и правое тело поднялись на малую высоту Δx, а левое тело опустилось на Δy. Верёвка проходит по неподвижным блокам и огибает подвижные, и её длина складывается из вертикальных кусков. Подвижный блок поднялся на Δx — оба вертикальных куска верёвки у него (слева и справа) стали короче на Δx, всего на $2\Delta x$ у каждого из $N = 2018$ блоков. Кусок у правого тела стал короче на Δx. Лишнюю верёвку забирает левое тело: оно опускается на

$$\Delta y = 2N\,\Delta x + \Delta x = (2N + 1)\,\Delta x = 4037\,\Delta x.$$



Нижние тела и правое тело поднимаются на Δx — укорачиваются отрезки верёвки, показанные бирюзовым; левое тело опускается на $4037\,\Delta x$

Перемещения за один и тот же промежуток времени связаны так, значит, и ускорения связаны так же — ускорение левого тела в 4037 раз больше: $a_1 = 4037\,a_2$, где $a_1 = -a_{1y}$ (левое тело опускается), а $a_2 = a_{2y}$ (нижние поднимаются).

4. Решение системы. Перепишем первые два уравнения через модули: $ma_1 = mg - T$ и $ma_2 = 2T - mg$. Неизвестное T уходит, если умножить первое на 2 и сложить со вторым:

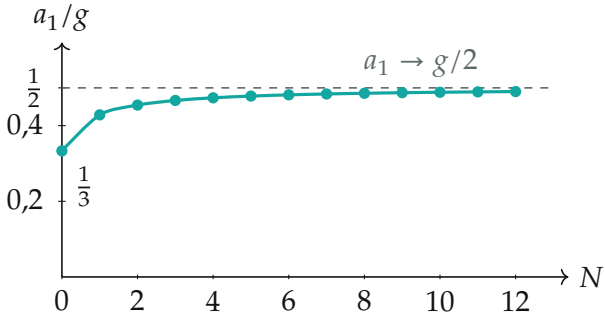
$$2ma_1 + ma_2 = mg \quad \Rightarrow \quad 2a_1 + a_2 = g.$$

С учётом $a_1 = 4037\,a_2$ получаем $(2 \cdot 4037 + 1)\,a_2 = g$, то есть

$$a_2 = \frac{g}{8075}, \qquad a_1 = 4037\,a_2 = \frac{4037}{8075}\,g \approx \frac{g}{2}.$$

Знаки: $a_2 > 0$ — нижние тела и правое поднимаются, $a_1 > 0$ — левое тело опускается. Так как $a_1 \approx g/2$ и $a_2 \approx g/8000$, верно качественное предсказание: левое тело падает с ускорением около $g/2$, остальные почти неподвижны. Натяжение $T = m(g - a_1) = \dfrac{4038}{8075}\,mg \approx 0{,}5\,mg$ — как мы и предполагали.

Как ответ зависит от числа блоков. Если подвижных блоков N, то та же цепочка рассуждений даёт $a_1 = \dfrac{(2N+1)\,g}{4N+3}$. При $N = 0$ получаем $g/3$ — известное ускорение в машине Атвуда с грузами m и $m/2$, это проверка. При больших N ответ быстро приближается к $g/2$.



Ускорение левого тела при N блоках ($N = 0$ — машина Атвуда)

Обратите внимание на два места. Первое: нижнее тело тянет вверх $2T$, а не T: его держат два конца верёвки на блоке. Именно поэтому нижние тела тянут верёвку слабее левого и ускорения у них разные — для всей системы общего ускорения нет. Второе: связь ускорений получается не из равенства длин «в лоб», а подсчётом, сколько вертикальных кусков верёвки укоротилось: у каждого подвижного блока их два, и это даёт множитель $2N + 1$.

Проверка. Размерность: a_1 выражено через g. Второй способ — через мощность сил. Если левое тело движется вниз со скоростью $4037\,v$, то нижние тела и правое поднимаются со скоростью v. Мощность сил тяжести равна скорости роста кинетической энергии:

$$mg \cdot 4037\,v - 2018\,mg\,v - \frac{mg}{2}\,v = \left(m \cdot 4037^2 + 2018\,m + \frac{m}{2}\right) a_2\,v,$$

откуда $a_2 = \dfrac{2018{,}5\,g}{16\,299\,387{,}5} = \dfrac{g}{8075}$, то же число. Предельный случай $N = 0$ даёт $g/3$ (машина Атвуда), $N \to \infty$ — $g/2$, как и в качественной оценке.

Ответ. $a_1 = \dfrac{4037}{8075}\,g \approx \dfrac{g}{2} \approx 4{,}9$ м/с^2, направлено вниз (остальные тела поднимаются с ускорением $a_2 = g/8075$).