Заряженный квадрат и рычаг с зарядами

Задача 5. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Из диэлектрика вырезали тонкий квадрат со стороной a и равномерно зарядили его зарядом Q. На продолжении диагонали на расстоянии $\sqrt{2}\,a$ от одного из углов квадрата разместили равноплечий рычаг длиной r (причем размер рычага много меньше размера квадрата). Рычаг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости рисунка. На концах рычага укрепили два одинаковых точечных заряда q_0 (знак которых совпадает со знаком заряда квадрата). Рычаг удерживают так, что он параллелен одной из сторон квадрата (см. рисунок). Определите момент сил, действующих на рычаг со стороны квадрата, относительно оси рычага.

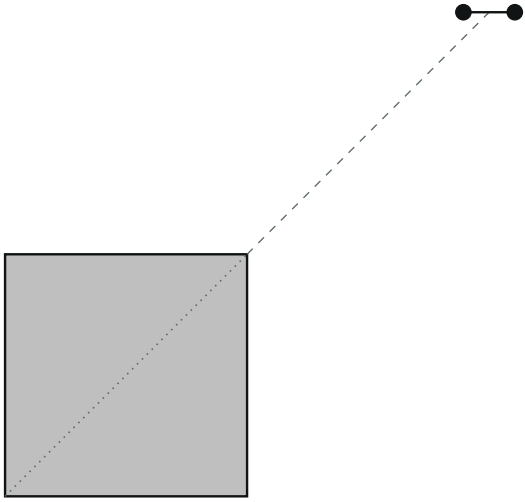


Рисунок условия: заряженный квадрат и рычаг с двумя зарядами на продолжении диагонали (расстояние от угла до центра рычага взято по условию, $\sqrt{2}\,a$)

▲ **Решение. Что происходит.** Квадрат отталкивает оба положительных заряда рычага; левый конец ближе к квадрату, поэтому сила на нём чуть больше, и рычаг стремится повернуться. Момент создаёт не сама сила, а малая разность сил на концах, и найти её прямым интегрированием

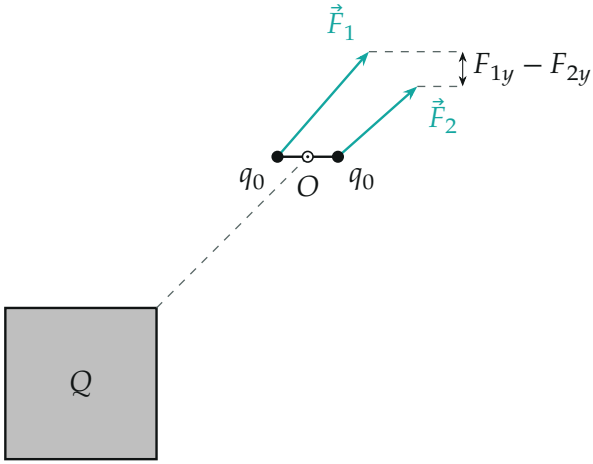
поля по квадрату трудно. Идея: сдвиг заряда относительно квадрата равносилен сдвигу самого квадрата, а сдвинутый квадрат — это исходный квадрат плюс две тонкие полоски разного знака. Разность сил сводится к силе от двух узких полосок; вертикальную составляющую их поля находим тем же приёмом, через разность потенциалов в двух близких точках, и всё сводится к потенциалу четырёх точечных зарядов в углах квадрата.

Обозначения и оси. Ось x направим вправо, ось y вверх, как на рисунке. Квадрат занимает область $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$. Центр рычага O лежит на продолжении диагонали: угол (a, a) отстоит от него на $\sqrt{2}\,a$, значит $O = (2a, 2a)$. Заряд 1 — левый конец рычага (он ближе к квадрату), заряд 2 — правый. $\sigma = Q/a^2$ — поверхностная плотность заряда квадрата, k — постоянная Кулона. Обозначения этой задачи: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ — силы со стороны квадрата на заряды 1 и 2.

1. Что создаёт момент. Момент вычисляем относительно оси в точке O. Горизонтальные составляющие сил направлены вдоль рычага, их линии действия проходят через ось, плечо равно нулю — момента они не создают. Вертикальные составляющие: F_{1y} приложена на расстоянии $r/2$ слева от оси и стремится повернуть рычаг по часовой стрелке, F_{2y} — справа, против часовой. Модуль суммарного момента

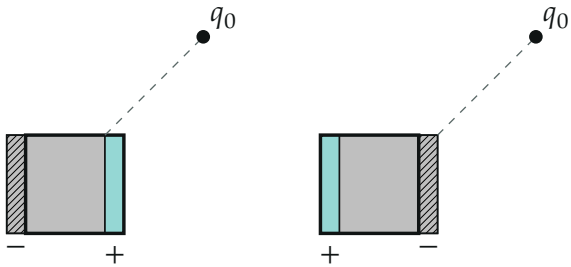
$$M = \left(F_{1y} - F_{2y}\right)\frac{r}{2},$$

а искомая разность выражается через поле квадрата: $F_{1y} - F_{2y} = q_0\left(E_{1y} - E_{2y}\right)$, где E_{1y} и E_{2y} — вертикальные составляющие поля квадрата в местах зарядов.



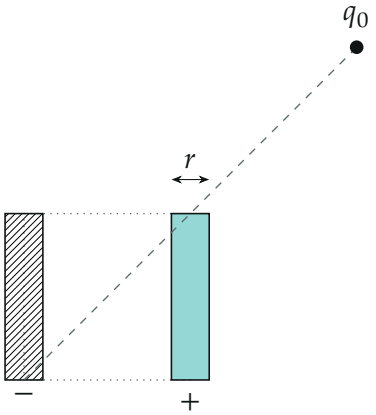
Силы на заряды: вертикальные составляющие различаются, и разность создаёт момент (рычаг изображён увеличенным, $r = 0{,}4\,a$)

2. Сдвиг заряда равносилен сдвигу квадрата. Поле квадрата в точке левого заряда, лежащей левее O на $r/2$, совпадает с полем в точке O квадрата, сдвинутого *вправо* на $r/2$: важно только взаимное положение. Сдвинутый вправо квадрат получается из исходного добавлением полоски шириной $r/2$ справа (с той же поверхностной плотностью σ, знак «+») и вычитанием такой же полоски слева (знак «−»: этот кусок исходного квадрата убрали). Для правого заряда всё зеркально: квадрат сдвинут *влево*, добавлена полоска слева, убрана справа.



Сдвинутый квадрат равен исходному плюс полоска «+» минус полоска «−»

Вычтем поле E_2 из E_1 в точке O. Поле исходного квадрата входит в оба слагаемых и сокращается. Справа остаются две полоски шириной $r/2$, примыкающие к правой стороне изнутри и снаружи, вместе — одна полоска шириной r с зарядом «+», середина которой на правой стороне квадрата. Слева так же получается полоска шириной r со знаком «−» на левой стороне. Итак, $E_{1y} - E_{2y}$ равна вертикальной составляющей поля двух полосок в точке O. Высота каждой полоски a, заряд $\pm\sigma ra = \pm Qr/a$.

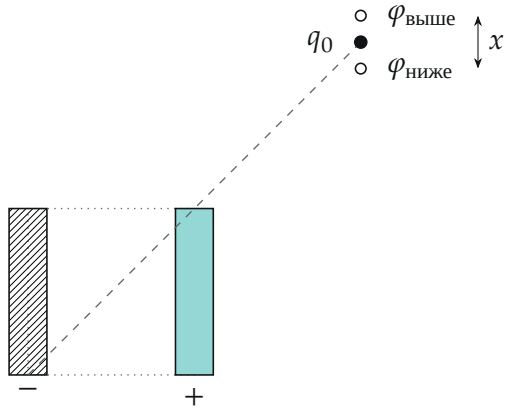


Две полоски шириной r, заряженные с плотностью $\pm\sigma$ (как у квадрата): их поле в точке заряда q_0 равно разности полей в точках зарядов рычага

3. Вертикальная составляющая поля полосок через потенциал. Проекция напряжённости на ось y равна $E_y = -\partial\varphi/\partial y$. Возьмём две точки на оси y на малом расстоянии x друг от друга: на $x/2$ ниже O и на $x/2$ выше O. Тогда

$$E_y = \frac{\varphi_{\text{ниже}} - \varphi_{\text{выше}}}{x}.$$

Потенциал в точке на $x/2$ выше O равен потенциалу в O тех же полосок, сдвинутых вниз на $x/2$ — тот же приём, что в пункте 2. Полоска, сдвинутая вниз, получается из исходной добавлением куска высотой $x/2$ снизу и вычитанием такого же куска сверху. Для точки на $x/2$ ниже O — наоборот. Вычтем: полоски сами сократятся, останутся четыре маленьких прямоугольника $r \times x$ на концах полосок, в углах квадрата.



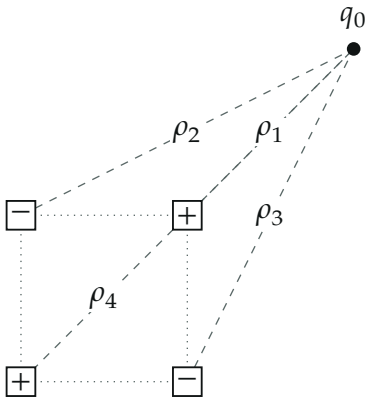
Две точки на расстоянии x друг от друга по вертикали около заряда q_0 (расстояние x увеличено)

Знаки прямоугольников найдём для полоски «+». Для $\varphi_{\text{ниже}}$ полоска сдвинута вверх: сверху добавлен кусок высотой $x/2$, снизу убран. Для $\varphi_{\text{выше}}$ она сдвинута вниз: снизу добавлен, сверху убран. В разности $\varphi_{\text{ниже}} - \varphi_{\text{выше}}$ наверху остаётся прямоугольник высотой x со знаком «+», внизу — со знаком «−». У полоски «−» знаки обратные. Итого в углах квадрата: в (a,a) и $(0,0)$ заряд $+\Delta q$, в $(a,0)$ и $(0,a)$ заряд $-\Delta q$.

4. Потенциал четырёх зарядов. Размер r много меньше расстояний до точки O, а x бесконечно мало, поэтому прямоугольники — точечные заряды. Поверхностная плотность у них та же, что у квадрата:

$$\Delta q = \sigma\, x\, r = \frac{Q\, r\, x}{a^2}.$$

Расстояния от точки O: до (a,a) — $\rho_1 = \sqrt{2}\,a$; до $(0,a)$ и $(a,0)$ — $\rho_2 = \rho_3 = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}\,a$; до $(0,0)$ — $\rho_4 = 2\sqrt{2}\,a$.



Заряды $+\Delta q$ и $-\Delta q$ в углах квадрата (знаки в квадратиках) и расстояния $\rho_1, \dots, \rho_4$ от них до точки O (размеры увеличены)

Потенциал в точке O равен сумме потенциалов точечных зарядов:

$$\varphi_{\text{ниже}} - \varphi_{\text{выше}} = k\,\Delta q \left(\frac{1}{\sqrt{2}\,a} + \frac{1}{2\sqrt{2}\,a} - \frac{1}{\sqrt{5}\,a} - \frac{1}{\sqrt{5}\,a} \right) = \frac{k\,\Delta q}{a} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Разделим на x и подставим $\Delta q / x = Qr/a^2$:

$$E_{1y} - E_{2y} = \frac{kQr}{a^3} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \qquad F_{1y} - F_{2y} = q_0 \left(E_{1y} - E_{2y} \right).$$

Число в скобках положительно: $\dfrac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}061$, $\dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}894$, разность $\approx 0{,}166$. Значит, $F_{1y} > F_{2y}$: ближний заряд отталкивается сильнее, как мы и ожидали.

5. Момент. Подставим разность сил в формулу пункта 1:

$$M = \left(F_{1y} - F_{2y} \right) \frac{r}{2} = \frac{k\,q_0\,Q\,r^2}{2a^3} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \approx 0{,}083\,\frac{k\,q_0\,Q\,r^2}{a^3}.$$

Момент направлен по часовой стрелке (на рисунке условия): левый,

ближний к квадрату конец рычага отталкивается вверх сильнее правого.

Обратите внимание на два места. Первое: момент пропорционален r^2, а не r: одна степень r — это разность сил на концах, вторая — плечо. Поэтому нельзя считать поле одинаковым на обоих концах: тогда момент получился бы нулём. Второе: приём со сдвигом работает, потому что $r \ll a$ и $x \to 0$: прямоугольники в углах можно считать точечными зарядами, и никакого интегрирования по квадрату не нужно.

Проверка. Размерность: kq_0Q/a^2 — сила, r^2/a — длина, произведение — Н · м.

Второй способ: разложим силу в ряд по r. Разность $E_{1y} - E_{2y} \approx -r\,\partial E_y/\partial x = r\,\partial^2\varphi/\partial x\,\partial y$ (потенциал φ — потенциал поля самого квадрата). Смешанная вторая производная потенциала от интеграла по прямоугольнику равна сумме значений $k\sigma/\rho$ в четырёх углах со знаками $+, -, -, +$, то есть тем же четырём слагаемым: $\dfrac{k\sigma}{a}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Численный расчёт: прямое интегрирование поля квадрата в точках $O \mp r/2$ (python) даёт $(E_{1y} - E_{2y})/(kQr/a^3) = 0{,}16641$ при $r/a = 0{,}2$; 0,16624 при 0,05; 0,16623 при 0,01 — сходится к $0{,}16623 = \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответ. $M = \dfrac{kq_0r^2Q}{2a^3}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 0{,}083\,\dfrac{kq_0Qr^2}{a^3}$, по часовой стрелке.