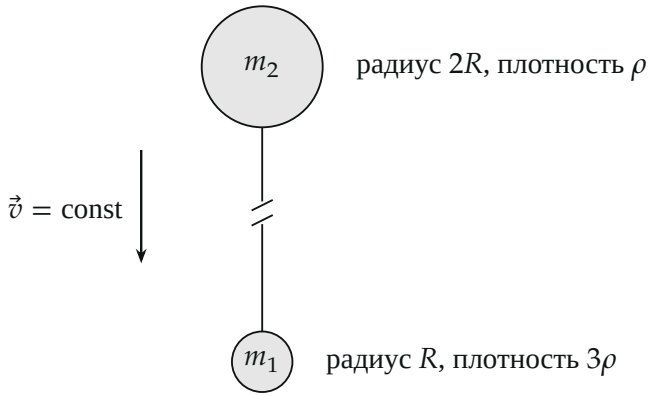
Два шара на нити падают в воздухе

Задача 2. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Два шара с радиусами R и $2R$ имеют плотности 3ρ и ρ соответственно. Шары связаны очень длинной нитью. Шары сбрасывают вниз с воздушного шара, и благодаря сопротивлению воздуха через некоторое время они движутся равномерно. Найти силу натяжения нити. Выталкивающей силой, действующей на шары со стороны воздуха, пренебречь. Считать силу сопротивления воздуха пропорциональной площади поперечного сечения шариков.



Поясняющий рисунок: два шара на нити падают вниз с одной скоростью

▲ **Решение. Что происходит.** Шары падают вниз на одной нити и движутся равномерно, значит, на каждый из них все силы уравновешены. Сил три: тяжесть, сопротивление воздуха и натяжение нити. Нить длинная и нерастяжимая, поэтому у шаров одна и та же скорость, и силы сопротивления отличаются только площадью сечения. Главная идея: записать второй закон Ньютона для каждого шара отдельно, выразить массы и силы сопротивления через одни и те же величины и исключить неизвестное сопротивление. Сначала надо понять, какой шар окажется сверху, — от этого зависит, куда нить тянет каждый из шаров.

Обозначения. m_1, $F_{c,1}$ — масса и сила сопротивления меньшего шара (радиус R, плотность 3ρ); m_2, $F_{c,2}$ — то же для большего шара (радиус

$2R$, плотность ρ); T — сила натяжения нити. Ось y направим вниз, по скорости: тогда проекция силы тяжести положительна, а ускорения нет.

1. Массы. Масса шара — плотность на объём $\frac{4}{3}\pi r^3$:

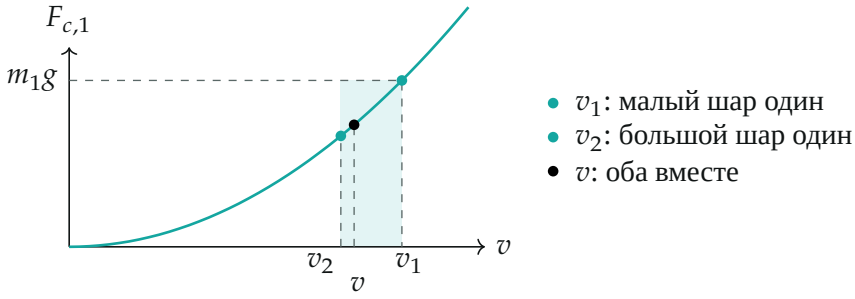
$$m_1 = 3\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi\rho R^3, \qquad m_2 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi (2R)^3 = \frac{32}{3}\pi\rho R^3 = \frac{8}{3}m_1.$$

2. Силы сопротивления. По условию сила сопротивления пропорциональна площади сечения πr^2, а скорость шаров одна, поэтому

$$\frac{F_{c,2}}{F_{c,1}} = \frac{\pi(2R)^2}{\pi R^2} = 4.$$

Обратите внимание: равенство скоростей следует из того, что нить натянута и не растягивается; если бы нить провисла, шары двигались бы независимо и условие $F_{c,2} = 4F_{c,1}$ потеряло бы смысл.

3. Какой шар сверху. Сравним, как каждый шар падал бы без нити. При одной скорости сопротивление большего шара в 4 раза больше, а вес — только в $\frac{8}{3}$ раза, поэтому у него на единицу веса сопротивление в $\frac{3}{2}$ раза больше, чем у меньшего. Значит, большой шар «парусит» сильнее и без нити падал бы медленнее: его установившаяся скорость v_2 меньше скорости v_1 меньшего шара. На графике показаны оба равновесия: меньший шар уравновешивается при $F_{c,1} = m_1 g$, а большой — когда $4F_{c,1} = \frac{8}{3}m_1 g$, то есть при $F_{c,1} = \frac{2}{3}m_1 g$.

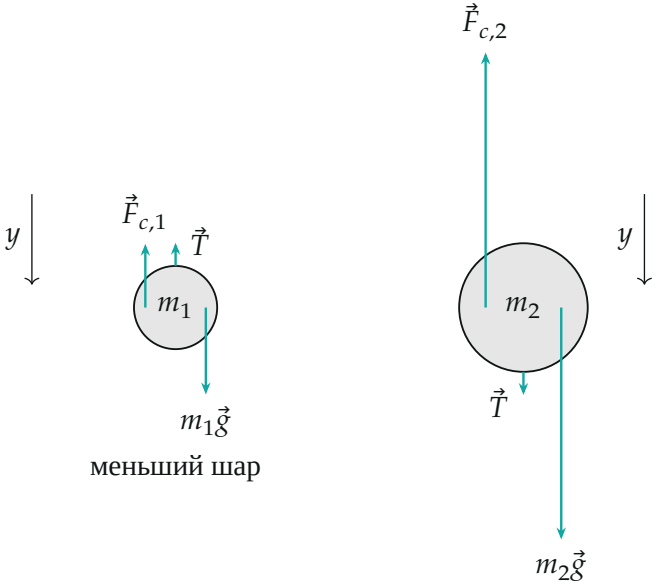


Сопротивление $F_{c,1}$ от скорости (для примера $\propto v^2$; важно лишь, что растёт): v между v_2 и v_1

Связанные нитью шары идут с общей скоростью v между v_2 и v_1. Меньший шар «хочет» падать быстрее и уходит вниз, натягивая нить, которая тянет его вверх, а большой тянет вниз. Поэтому большой шар — сверху, меньший — снизу.

4. Второй закон Ньютона для каждого шара. Движение равномерное, ускорение равно нулю. Нить тянет нижний шар вверх, а верхний вниз; сопротивление направлено вверх, против скорости. Запишем в проекции на ось y (вниз) для меньшего шара (нить тянет его вверх) и для большего (нить тянет его вниз):

$$m_1 g - T - F_{c,1} = 0, \qquad m_2 g + T - F_{c,2} = 0.$$



Силы на каждый шар; длины стрелок — в масштабе, $T : m_1 g = 4 : 15$

5. Решение системы. Неизвестных две, T и $F_{c,1}$, и два уравнения. Из первого $F_{c,1} = m_1 g - T$. Подставим во второе вместе с $m_2 = \frac{8}{3} m_1$ и

$F_{c,2} = 4F_{c,1}$:

$$\frac{8}{3}m_1 g + T = 4\,(m_1 g - T) \quad \Rightarrow \quad 5T = \Big(4 - \frac{8}{3}\Big)m_1 g = \frac{4}{3}m_1 g,$$

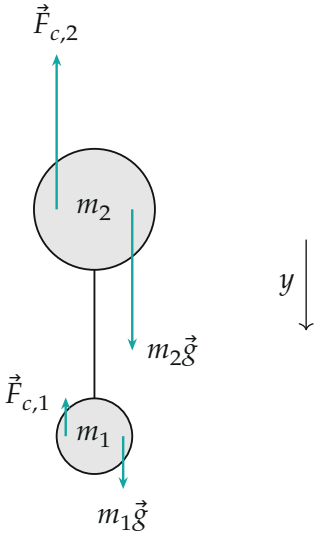
$$T = \frac{4}{15}m_1 g.$$

Подставим $m_1 = 4\pi\rho R^3$:

$$T = \frac{4}{15}\cdot 4\pi\rho R^3 g = \frac{16\pi}{15}\rho R^3 g.$$

Попутно получаем $F_{c,1} = \frac{11}{15}m_1 g$ и $F_{c,2} = \frac{44}{15}m_1 g$.

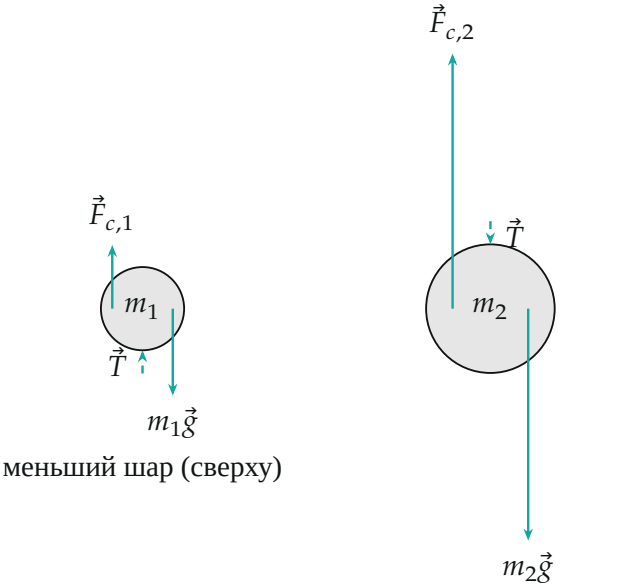
Проверка и второй способ. Размерность: $\rho R^3 g$ — кг/м^3·м^3·м/с^2 = Н. Второй способ — для системы «оба шара и нить» (рисунок): нить внутренняя, и её сила на рисунок не входит; равномерное движение даёт $(m_1 + m_2)g = F_{c,1} + F_{c,2}$, то есть $\frac{11}{3}m_1 g = 5F_{c,1}$, откуда $F_{c,1} = \frac{11}{15}m_1 g$ и $T = m_1 g - F_{c,1} = \frac{4}{15}m_1 g$, как и выше.



Система из двух шаров: внешние силы — тяжесть и сопротивление, натяжение нити внутреннее

Предельный случай: при массе большего шара $m_2 = \mu m_1$ те же уравнения дают $T = \dfrac{4-\mu}{5} m_1 g$. При $\mu = 4$ вес пропорционален площади, шары падают с одинаковой скоростью и нить свободна ($T = 0$) — верно. У нас $\mu = \frac{8}{3} < 4$, и $T > 0$.

Проверим и расстановку шаров. Если бы меньший шар был сверху, те же рассуждения дали бы $T = -\frac{4}{15} m_1 g < 0$: нить пришлось бы не тянуть, а толкать (рисунок ниже), а так она не может. Значит, положение «большой сверху» — единственное возможное.



Меньший шар сверху: нить должна была бы толкать шары (штриховые стрелки), так не бывает

Смысл: нить притормаживает быстрый малый шар и подгоняет медленный большой, и в сумме их общий вес как раз равен общему сопротивлению.

Ответ. $T = \dfrac{4}{15} m_1 g = \dfrac{16\pi}{15} \rho R^3 g$, где $m_1 = 4\pi\rho R^3$ — масса меньшего шара; большой шар идёт сверху.