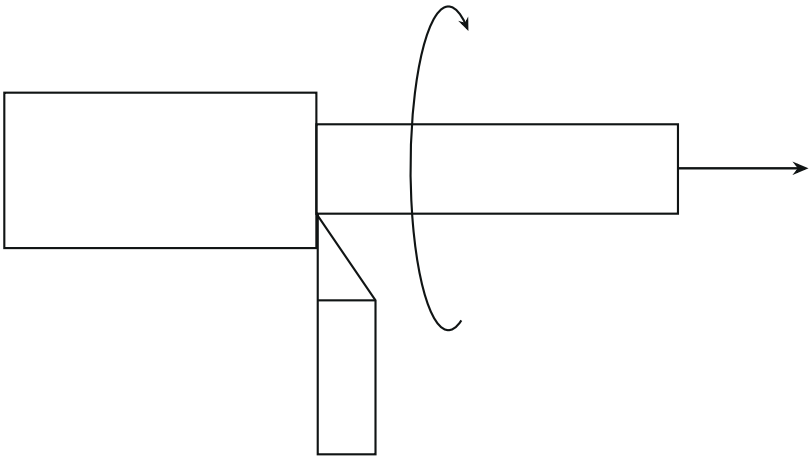
Центр тяжести заготовки при обточке

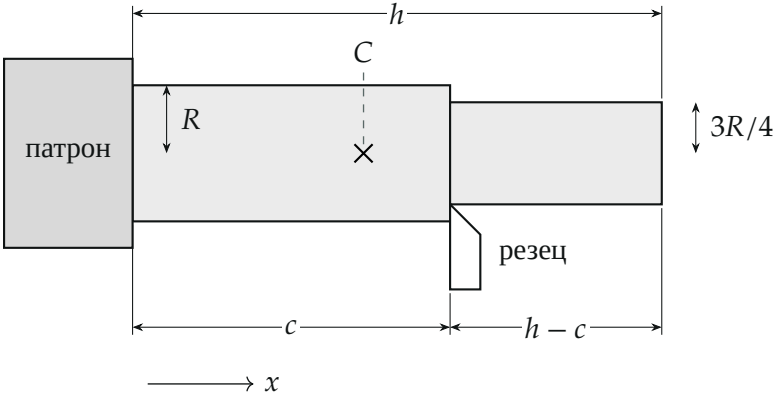
Задача 3. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Из цилиндрической заготовки радиуса R, длиной h токарь резцом на токарном станке вырезает цилиндр радиуса $3R/4$, снимая металл резцом за один проход (см. рисунок). На какое максимальное расстояние смещается центр тяжести заготовки в процессе ее обработки?



▲ **Решение. Что происходит.** Резец идёт вдоль заготовки и снимает слой, после чего за ним остаётся тонкий цилиндр радиуса $3R/4$, а перед ним — прежний толстый цилиндр радиуса R. Тело всё время состоит из двух соосных цилиндров, поставленных друг на друга. Тонкая часть легче, поэтому центр тяжести уходит от середины заготовки в сторону толстой части. В начале обработки (ничего не снято) и в конце (снято всё) центр тяжести посередине, а между ними сдвигается — значит, у смещения есть максимум, и его надо найти. Класс задачи: центр тяжести составного тела, у которого размеры части меняются; ответ — максимум функции положения резца.

Обозначения. Ось x направим вдоль оси заготовки от патрона к свободному концу. Заготовка занимает $0 \le x \le h$, плотность ρ постоянна. Координату резца обозначим c: слева от него, на $0 \le x \le c$, цилиндр

радиуса R, справа, на $c \le x \le h$, — радиуса $3R/4$. Резец идёт от свободного конца к патрону, как на рисунке решения организаторов, то есть c уменьшается от h до 0 (если он идёт в обратную сторону, картина отражается зеркально, а ответ тот же). Через x_C обозначим координату центра тяжести и через $\delta = h/2 - x_C$ — его смещение от середины в сторону патрона. Вращение заготовки на положение центра тяжести не влияет.



Заготовка в произвольный момент: резец в точке c, слева цилиндр радиуса R, справа 3R/4, C — центр тяжести

1. Массы и центры частей. Масса цилиндра — плотность на площадь основания и на длину:

$$m_1 = \rho\pi R^2 c, \qquad m_2 = \rho\pi\Big(\frac{3R}{4}\Big)^2 (h-c) = \frac{9}{16}\rho\pi R^2 (h-c).$$

Центр тяжести каждого однородного цилиндра — его середина: $x_1 = c/2$ и $x_2 = (h+c)/2$.

2. Центр тяжести всего тела. Координата центра тяжести системы двух частей — среднее взвешенное по массам:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{c^2 + \frac{9}{16}(h^2 - c^2)}{2[c + \frac{9}{16}(h-c)]} = \frac{9h^2 + 7c^2}{2(9h+7c)}.$$

Смещение от середины:

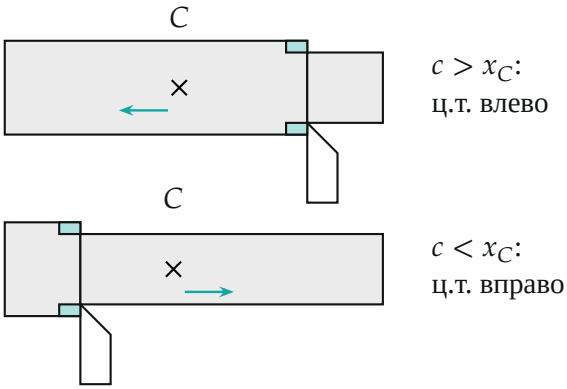
$$\delta = \frac{h}{2} - x_C = \frac{7c\,(h-c)}{2\,(9h+7c)}.$$

Проверим края: при $c = h$ (ничего не снято) и при $c = 0$ (снято всё) смещение равно нулю, а при $0 < c < h$ оно положительно: центр тяжести смещён в сторону толстой части, к патрону.

3. Где смещение наибольшее: рассуждение. Рассмотрим малый шаг резца: он снимает тонкое кольцо шириной dc с толстой части, у самого резца. Если из тела массой M с центром тяжести x_C убрать малую массу dm, лежащую в точке c, то новый центр тяжести

$$x'_C = \frac{Mx_C - c\,dm}{M - dm} \quad \Rightarrow \quad x'_C - x_C = \frac{dm}{M}\,(x_C - c).$$

Знак определяет положение резца относительно центра тяжести: пока резец правее центра тяжести ($c > x_C$), убираемая масса лежит правее и центр тяжести сдвигается влево, ещё дальше от середины; как только резец оказывается левее ($c < x_C$), убираемая масса лежит левее и центр тяжести идёт назад, вправо. Значит, наибольшее смещение — в тот момент, когда центр тяжести совпадает с резцом, $x_C = c$.

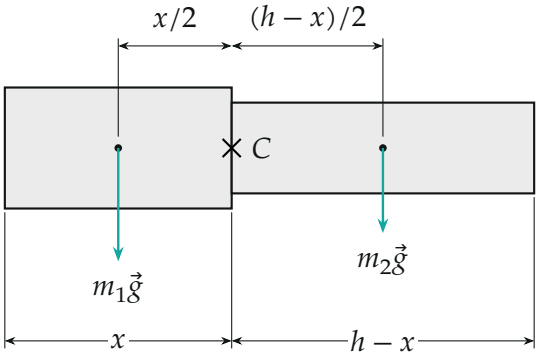


Малое кольцо, снятое резцом (зелёное): при $c > x_C$ центр тяжести сдвигается влево, при $c < x_C$ — вправо

4. Положение резца в этот момент. Пусть центр тяжести совпадает со стыком частей, $x_C = c \equiv x$. Условие равновесия по моментам относительно центра тяжести: момент тяжести левой части равен моменту тяжести правой, плечи — расстояния от середин частей до стыка, $x/2$ и $(h-x)/2$:

$$m_1 \frac{x}{2} = m_2 \frac{h-x}{2} \quad \Rightarrow \quad R^2 x \cdot \frac{x}{2} = \left(\frac{3R}{4}\right)^2 (h-x)\frac{h-x}{2},$$

$$x = \frac{3}{4}(h-x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3h}{7}.$$



Резец стоит в центре тяжести: моменты тяжести левой и правой частей относительно него равны ($m_1 : m_2 = 4 : 3$)

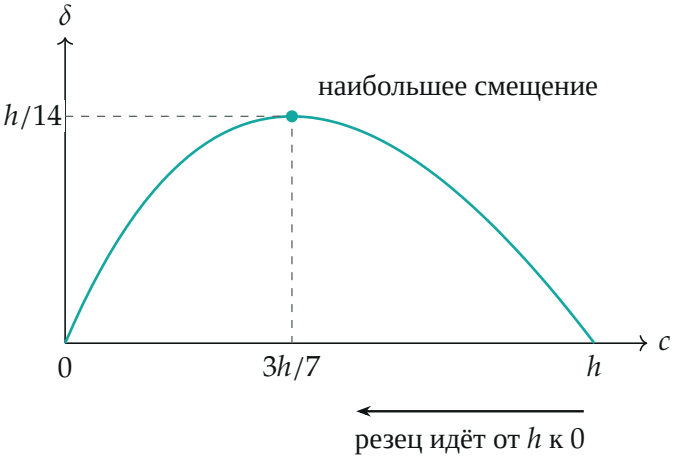
Ключевой шаг — положение $x = 3h/7$ — проверим вторым способом.

5. Второй способ: максимум функции. Найдём максимум $\delta(c)$ производной. Приравняем нулю производную от $\dfrac{c(h-c)}{9h+7c}$:

$$(h-2c)(9h+7c) - 7c(h-c) = 9h^2 - 18hc - 7c^2 = 0,$$

$$7c^2 + 18hc - 9h^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{-18+24}{14}h = \frac{3h}{7}.$$

(Отрицательный корень не подходит, $c > 0$.) Тот же результат — проверка рассуждения пункта 3.



Смещение центра тяжести в зависимости от положения резца: наибольшее при $c = 3h/7$

6. Наибольшее смещение. Подставим $c = 3h/7$ в δ из пункта 2:

$$\delta_{\max} = \frac{7 \cdot \frac{3h}{7} \cdot \frac{4h}{7}}{2\,(9h + 3h)} = \frac{12h^2/7}{24h} = \frac{h}{14}, \qquad \text{или} \qquad \delta_{\max} = \frac{h}{2} - \frac{3h}{7} = \frac{h}{14}.$$

Обратите внимание: вопрос — про наибольшее смещение за всё время обработки; в конце центр тяжести вернулся в середину, и конечное смещение нулевое.

Проверка. Размерность: δ — длина (числитель — длина в квадрате, знаменатель — длина). Значения: $\delta(0{,}3h) \approx 0{,}066h$, $\delta(0{,}5h) = 0{,}070h$, $\delta(3h/7) \approx 0{,}0714h = h/14$ — наибольшее. Предел: для общего отношения площадей k (у нас $k = \frac{9}{16}$) смещение равно $\dfrac{(1-k)\,c\,(h-c)}{2\,[kh + (1-k)c]}$ и при $k \to 1$ (резец ничего не снимает) стремится к нулю.

Смысл: центр тяжести уходит к толстому концу, пока резец не дойдёт до него, а потом возвращается; наибольшее смещение — $h/14$ в сторону патрона.

Ответ. $\delta_{\max} = \dfrac{h}{14}$ (в момент, когда резец находится на расстоянии $3h/7$ от толстого конца и совпадает с центром тяжести).