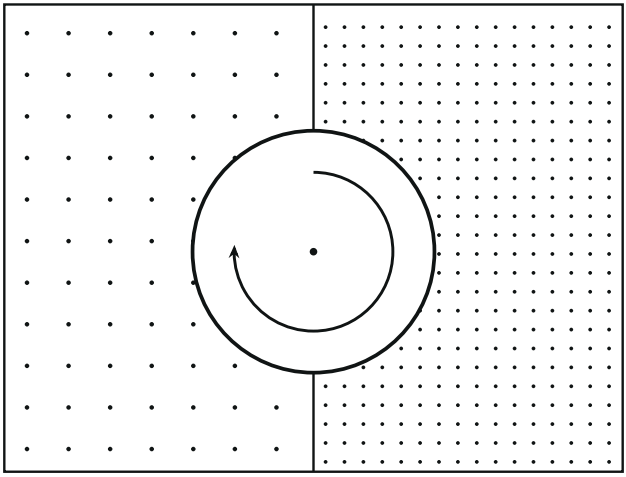
Раскрученный диск на границе поверхностей

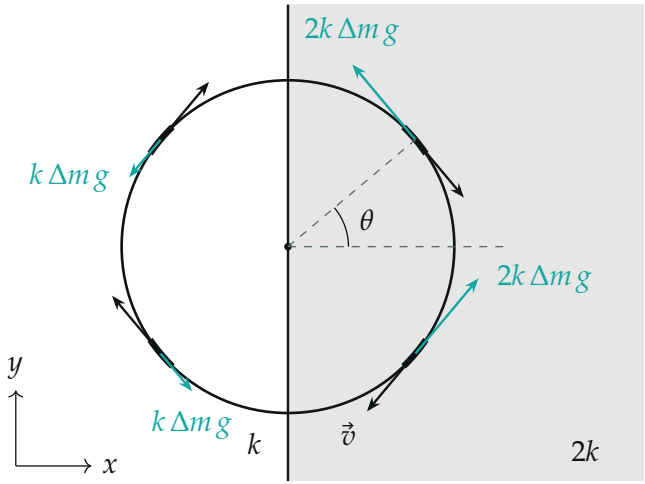
Задача 4. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Однородный диск раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω и положили на границу раздела двух горизонтальных полуплоскостей так, что его центр оказался точно на границе (см. рисунок; вид сверху). Коэффициент трения между диском и одной полуплоскостью k, между диском и другой полуплоскостью $2k$. Найти ускорение центра диска сразу после того, как он оказался на поверхности.



▲ **Решение. Что происходит.** Диск вращается, а его центр в первый момент неподвижен, поэтому каждая точка диска, кроме центра, скользит по плоскости по касательной к окружности вокруг оси, и на неё действует сила трения скольжения против скорости. Если бы диск лежал на одной плоскости, силы на противоположных сторонах гасили бы друг друга по симметрии. Здесь половина диска лежит на плоскости с коэффициентом $2k$, другая — с k, поэтому силы с одной стороны больше, и их равнодействующая не равна нулю. Главная идея: разбить диск на тонкие кольца, кольцо — на малые элементы, найти силу трения на каждый элемент и просуммировать. Класс задачи: сила, распределённая по телу, и её сумма.

Обозначения. Ось y направим вдоль границы, ось x — перпендикулярно ей, в сторону полуплоскости с коэффициентом $2k$ (на рисунке условия это правая, с более частыми точками; плотность точек условно показывает шероховатость). Диск вращается по часовой стрелке, как на рисунке. M — масса диска, r — радиус рассматриваемого кольца, m — его масса, Δm — масса малого элемента кольца длиной Δl, θ — угол между радиусом, проведённым к элементу, и осью x; $k_1 = 2k$ и $k_2 = k$ — коэффициенты трения для правой и левой половин.

Диск однородный и лежит плоско, поэтому давление на плоскость одинаково по всей площади контакта, и на элемент массой Δm приходится нормальная сила $N = \Delta m\, g$. Сила трения скольжения на нём $F = k_i \Delta m\, g$, где k_i — коэффициент той половины, на которой лежит элемент.



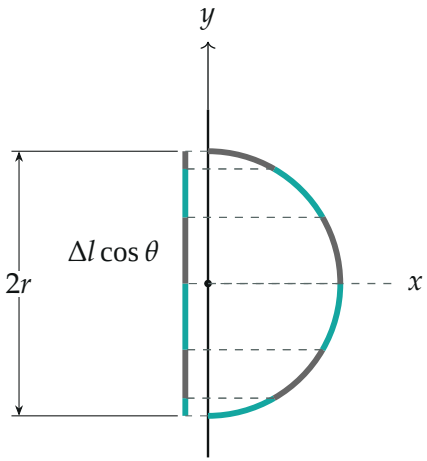
Четыре элемента кольца: скорости (чёрные стрелки) и силы трения (бирюзовые); справа сила в два раза больше

1. Направление силы трения. Центр диска сразу после посадки неподвижен, плоскость неподвижна, значит, скорость элемента $v = \omega r$ направлена по касательной к кольцу. При вращении по часовой стрелке для элемента под углом θ скорость $\vec{v} = \omega r\,(\sin\theta, -\cos\theta)$. Трение направлено против скорости. Обратите внимание: трение скольжения

не зависит от скорости, поэтому модуль силы на элемент одинаков в любой точке кольца, меняется только направление:

$$\vec{F} = k_i\,\Delta m\,g\,(-\sin\theta,\ \cos\theta).$$

2. Поперёк границы всё сокращается. Возьмём на одной и той же половине два элемента под углами θ и $-\theta$: проекции их сил на x равны $\mp k_i \Delta m\, g \sin\theta$ и взаимно уничтожаются. Значит, на каждую половину кольца сила направлена вдоль границы, вдоль оси y, и равна сумме проекций $k_i\,\Delta m\,g\cos\theta$. Для правой половины ($k_1$) эта сила направлена вверх, для левой (k_2) — вниз.



Проекции малых элементов половины кольца на границу (для малых элементов $\Delta l\cos\theta$) складываются в диаметр $2r$

3. Сила на половину кольца. Масса элемента пропорциональна его длине: $\Delta m = m\dfrac{\Delta l}{2\pi r}$. Величина $\Delta l\cos\theta$ — это проекция элемента на границу (рисунок), а проекции всех элементов половины кольца в сумме дают её диаметр $2r$. Поэтому

$$F_{y,\text{полов}} = k_i\,g\sum \Delta m\cos\theta = k_i\,g\,\frac{m}{2\pi r}\sum \Delta l\cos\theta,$$

$$F_{y,\text{полов}} = k_i\,g\,\frac{m}{2\pi r}\cdot 2r = \frac{k_i\,m\,g}{\pi}.$$

Второй способ — интегралом по углу: $\Delta m = \dfrac{m}{2\pi}\,d\theta$, и сила на правую половину равна

$$k_1 g\,\frac{m}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = k_1 g\,\frac{m}{2\pi}\cdot 2 = \frac{k_1 m g}{\pi}.$$

4. Кольцо и диск. Равнодействующая на кольцо — разность сил на две половины, вверх от большей:

$$F_{\text{кольца}} = \frac{(k_1 - k_2)\,m\,g}{\pi}.$$

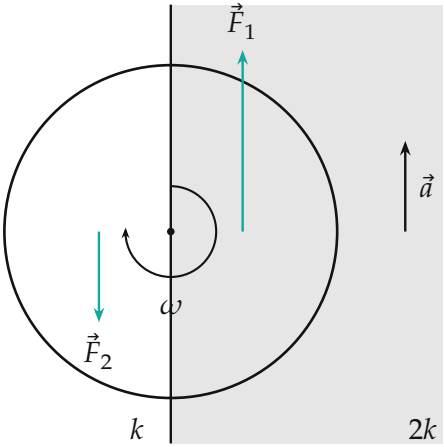
Диск состоит из колец, масса которых в сумме равна M, и коэффициент $(k_1 - k_2)g/\pi$ у всех колец один и тот же, поэтому для диска

$$F = \frac{(k_1 - k_2)\,Mg}{\pi}.$$

Вертикальные силы (тяжесть и опора) уравновешены, поэтому по второму закону Ньютона для центра масс диска $Ma = F$:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{(k_1 - k_2)\,g}{\pi} = \frac{(2k - k)\,g}{\pi} = \frac{kg}{\pi}.$$

Ускорение направлено вдоль границы полуплоскостей — в ту сторону, куда направлена сила трения на половину с коэффициентом $2k$ (на рисунке — вверх).



Силы на половины диска: $F_1 = 2kMg/\pi$ вверх, $F_2 = kMg/\pi$ вниз; равнодействующая kMg/π вверх, ускорение $\vec{a}$ вдоль границы

Проверка. Размерность: kg — м/с^2, коэффициент трения безразмерен. Предел: при $k_1 = k_2$ (диск на одной плоскости) получаем $a = 0$, как и должно быть по симметрии. Ответ не зависит ни от ω, ни от радиуса диска: сила трения скольжения не зависит от скорости, а при росте диска и масса, и плечо растут одинаково. Второй способ проверки — прямой интеграл по площади правого полудиска радиуса R с поверхностной плотностью $\sigma = M/(\pi R^2)$:

$$F_1 = k_1 \sigma g \int_0^R \rho\, d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = k_1 \sigma g R^2 = \frac{k_1 M g}{\pi},$$

то же, что дала сумма по кольцам. Численный подсчёт по сетке точек диска даёт $a \approx 0{,}3183\, kg$, то есть kg/π.

Смысл: скользящий диск «выбрасывается» вдоль границы, потому что с шероховатой стороны трение сильнее. Если шероховатее левая полуплоскость, ускорение направлено противоположно.

Ответ. $a = \dfrac{kg}{\pi}$, направлено вдоль границы полуплоскостей туда, куда движутся точки диска на полуплоскости k (на рисунке — вверх).