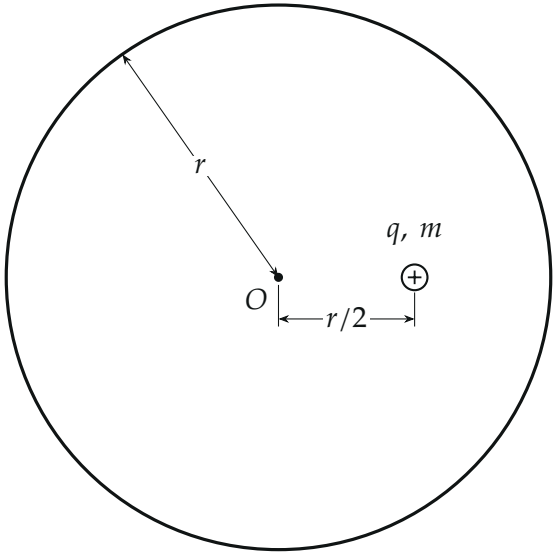
Заряд в катушке при включении тока

Задача 5. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Внутри длинной катушки радиуса r на расстоянии $r/2$ от ее оси находится положительный точечный заряд q с массой m. Вначале ток через катушку не течет. В некоторый момент времени в катушке включается электрический ток, индукция магнитного поля внутри катушки возрастает от нуля до значения B_0 и далее от времени не зависит. При этом заряд приходит в движение. На каком минимальном расстоянии от оси катушки он пролетит, и какую скорость будет иметь в этот момент? Силой тяжести пренебречь.

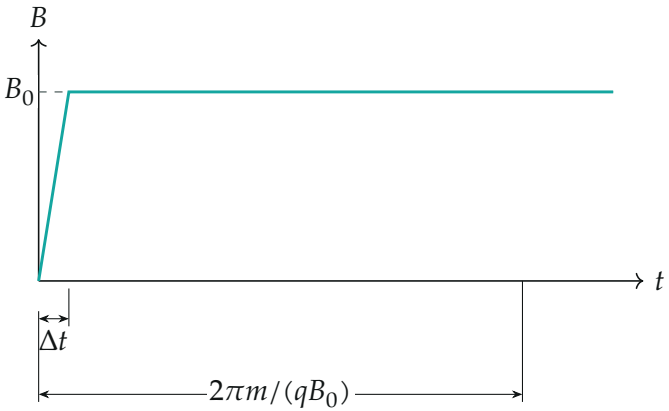


Поясняющий рисунок: сечение катушки плоскостью, перпендикулярной оси; заряд на расстоянии $r/2$ от оси

▲ **Решение. Что происходит.** Пока магнитное поле растёт, меняющийся магнитный поток порождает вихревое электрическое поле; оно и разгоняет покоящийся заряд. Когда поле перестало расти, электрического поля нет, а заряд, уже имея скорость, движется в однородном магнитном поле. Значит, задача из двух частей, в духе «индукция — динамика»: сначала скорость, которую заряд получил от вихревого поля, потом

движение по орбите в магнитном поле. Главная идея первой части — рассмотреть малый промежуток времени, за который заряд не успевает сместиться, и записать для него закон изменения импульса. Включение считаем быстрым: за время включения заряд остаётся практически на месте (условие, при котором это верно, получим в пункте 4); если поле нарастает медленно, всё зависит от закона нарастания, а он в условии не задан.

Обозначения. Ось катушки — точка O на рисунке (вид вдоль оси). Заряд в начальный момент — на расстоянии $x = r/2$ от оси. Вектор $\vec{B}$ направим «от нас» (вглубь рисунка), как у организаторов; при противоположном направлении всё отражается зеркально, ответ тот же. Δt — время включения тока, v — скорость заряда после включения.



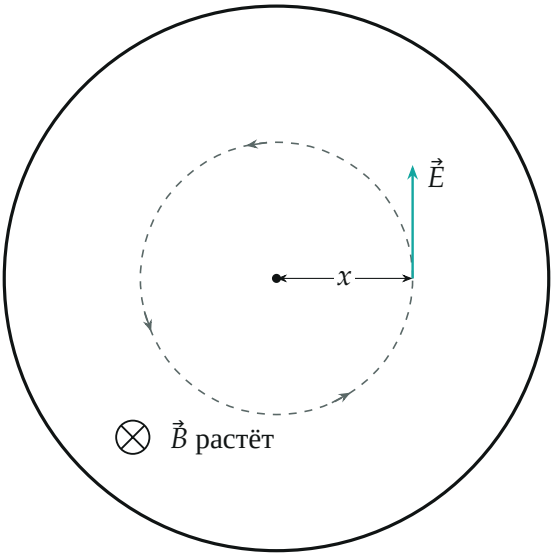
Индукция $B(t)$: рост от нуля до B_0 за время Δt, много меньшее времени оборота

1. Вихревое электрическое поле. Рассмотрим окружность радиуса x с центром на оси внутри катушки. Магнитное поле однородно, поэтому поток через неё $\Phi = B\pi x^2$. По закону электромагнитной индукции ЭДС в контуре равна скорости изменения потока: $\varepsilon = \pi x^2 \dfrac{dB}{dt}$. С другой стороны, ЭДС — это работа электрического поля над единичным зарядом при обходе контура. Система симметрична относительно оси, поэтому модуль поля E на всей окружности один и тот же, а направлено

оно по касательной (радиальная составляющая означала бы, что внутри контура есть заряды). Работа на обходе — $2\pi x\,E$:

$$2\pi x\,E = \pi x^2\,\frac{dB}{dt} \quad\Rightarrow\quad E = \frac{x}{2}\,\frac{dB}{dt}.$$

По правилу Ленца индукционное поле направлено так, чтобы противодействовать росту потока: при $\vec{B}$ вглубь рисунка поле $\vec{E}$ идёт против часовой стрелки (рисунок), на расстоянии x от оси оно направлено по касательной — у заряда вверх.



Вихревое поле: $\vec{E}$ направлено по касательной к окружностям с центром на оси, при росте B вглубь рисунка — против часовой стрелки

2. Скорость после включения. Пока поле растёт, на заряд действует сила $q\vec{E}$; магнитная сила в этот короткий промежуток мала (скорость ещё мала, и заряд почти на месте). Запишем второй закон Ньютона в виде $m\,dv = qE\,dt$ и просуммируем от начала включения до момента, когда B достигло B_0. Так как заряд всё время почти на расстоянии x от оси, поле $E = \frac{x}{2}\,\frac{dB}{dt}$ в этой точке, а $\int \frac{dB}{dt}\,dt = B_0$:

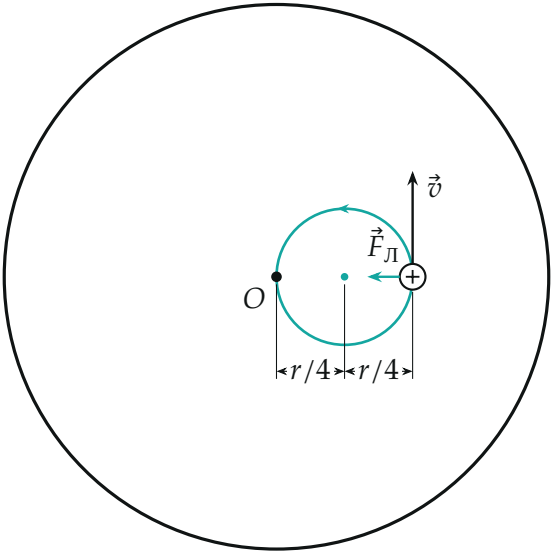
$$mv = q\int E\,dt = q\,\frac{x}{2}\int \frac{dB}{dt}\,dt = \frac{qB_0x}{2} \quad\Rightarrow\quad v = \frac{qB_0x}{2m} = \frac{qB_0r}{4m}.$$

Скорость направлена по касательной, вверх. Обратите внимание: интеграл $\int dB$ не зависит от закона нарастания, нужно только, чтобы заряд не смещался за время включения; конкретное значение Δt в ответ не входит.

3. Движение после включения. Теперь $B = B_0 = \text{const}$, электрического поля нет. Сила Лоренца $q\vec{v}\times\vec{B}$ перпендикулярна скорости и работы не совершает, поэтому модуль скорости остаётся v (это же следует из того, что касательное ускорение равно нулю). Сила постоянна по модулю и всегда перпендикулярна скорости, значит, заряд движется по окружности радиуса $R_{\text{орб}}$:

$$\frac{mv^2}{R_{\text{орб}}} = qB_0v \quad \Rightarrow \quad R_{\text{орб}} = \frac{mv}{qB_0} = \frac{x}{2} = \frac{r}{4}.$$

Куда повёрнёт заряд? Скорость — вверх, $\vec{B}$ — вглубь, сила Лоренца $q\vec{v}\times\vec{B}$ направлена к оси: центр окружности лежит на отрезке между зарядом и осью, на расстоянии $r/4$ от заряда, то есть на расстоянии $r/2 - r/4 = r/4$ от оси.



Орбита после включения: окружность радиуса $r/4$ с центром на расстоянии $r/4$ от оси проходит через ось O; $\vec{F}_Л$ — сила Лоренца в начальной точке

4. Что получилось и когда это верно. Расстояние от оси до центра орбиты равно её радиусу $r/4$, поэтому окружность проходит через точку O — через ось катушки. Расстояние от оси при этом принимает все значения от 0 до $r/2$ (наибольшее — в начальной точке), орбита целиком внутри катушки ($r/2 < r$), где поле однородно, так что всё сказанное верно. Минимальное расстояние до оси равно нулю, скорость в этот момент — та же, $v = \dfrac{qB_0 r}{4m}$.

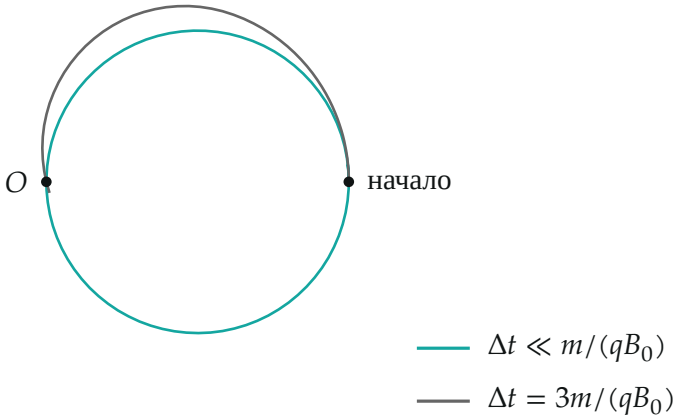
Условие быстрого включения: смещение заряда за время Δt должно быть много меньше радиуса орбиты $r/4$. Ускорение $a = qE/m \sim qB_0 x/(2m\,\Delta t)$, смещение $\sim a\Delta t^2 \sim \dfrac{qB_0 x}{m}\Delta t$, откуда

$$\frac{qB_0 x}{m}\Delta t \ll x \quad \Rightarrow \quad \Delta t \ll \frac{m}{qB_0}.$$

Величина $m/(qB_0)$ — время, за которое заряд проходит радиан орбиты (период равен $2\pi m/(qB_0)$), так что включение должно быть быстрым по сравнению с оборотом.

Проверка и второй способ. Размерность: так как qvB — сила, $[qB] =$ Н · с/м, и $[qB_0 r/m] =$ Н · с/кг = м/с, верно. Предел: $x \to 0$ (заряд на оси) даёт $v \to 0$, и вихревое поле на оси действительно нулевое. Второй способ — сохранение обобщённого момента импульса: для частицы в осесимметричной системе сохраняется величина $m\rho v_\varphi + q\rho A_\varphi$, где ρ — расстояние до оси, v_φ — проекция скорости на направление «вокруг оси», $A_\varphi = \rho B/2$ — векторный потенциал внутри катушки. В начале заряд покоится и $B = 0$, значит, эта величина равна нулю при любом законе включения. После включения она равна $m\rho v_\varphi - qB_0\rho^2/2 = 0$ (знак зависит от направления $\vec{B}$), откуда $v_\varphi = qB_0\rho/(2m)$; при $\rho = r/2$ это то же $v = qB_0 r/(4m)$. А равенство нулю этой величины означает, что орбита проходит через ось: на оси $\rho = 0$, и ограничений нет. Поэтому *минимальное расстояние равно нулю при любом законе включения*, а скорость $\dfrac{qB_0 r}{4m}$ — при быстром. Численный расчёт движения с линейным нарастанием поля за $\Delta t = 3m/(qB_0)$ (неравенство нарушено) подтверждает это: заряд всё равно проходит через ось, а его скорость в этот

момент $\approx 0{,}94\,\dfrac{qB_0 r}{4m}$.



Расчёт траекторий: быстрое включение — окружность, медленное ($\Delta t = 3m/(qB_0)$) — другая кривая, но тоже через ось O

Смысл: вихревое поле «толкает» заряд по касательной, а магнитное поле загибает траекторию внутрь, и из-за соотношения размеров орбита задевает ось.

Ответ. Минимальное расстояние от оси равно 0 (заряд проходит через ось катушки); скорость в этот момент $v = \dfrac{qB_0 r}{4m}$ (включение быстрое, $\Delta t \ll m/(qB_0)$).