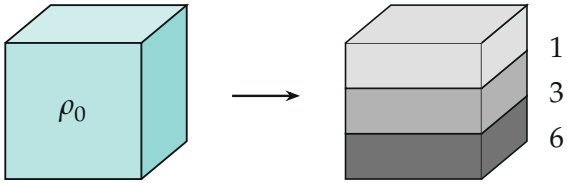
Плотность кубика из трёх частей

Задача 1. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 7 класс, задача 1] В распоряжении школьника имеется покрашенный краской кубик. Измеряя его массу и объем, школьник нашел, что плотность кубика равна ρ_0. Потом краска сошла, и школьник увидел, что кубик состоит из трех частей одинакового объема, массы которых относятся как 1:3:6. Найти плотность самой легкой части. Массой и объемом краски пренебречь.



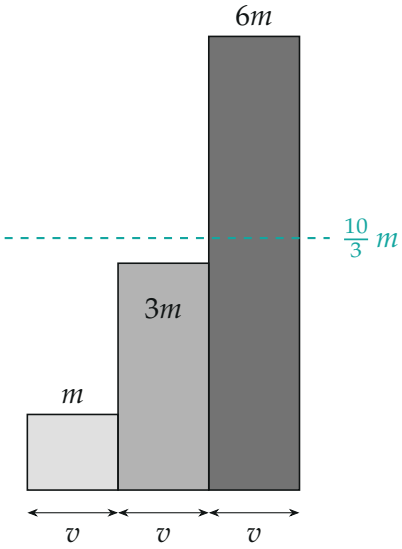
Поясняющий рисунок: под краской — три части одинакового объёма с массами в отношении 1 : 3 : 6 *(форма частей неважна)*

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю плотность составного тела. Школьник измерил массу и объём всего кубика, то есть нашёл его *среднюю* плотность: полную массу, делённую на полный объём. Главная идея: выразить полную массу и полный объём через массу и объём самой лёгкой части.

Обозначения. m — масса самой лёгкой части; v — объём каждой части (они одинаковые); ρ — плотность лёгкой части; M и V — масса и объём всего кубика.

1. Массы и объём частей. Массы частей относятся как 1 : 3 : 6, значит они равны m, $3m$, $6m$. Объёмы всех трёх одинаковые, v. Полная масса и полный объём кубика:

$$M = m + 3m + 6m = 10m, \qquad V = v + v + v = 3v.$$



Массы трёх частей одинакового объёма v; пунктир — средняя масса на объём v, она и задаёт среднюю плотность

2. Средняя плотность кубика. По определению средней плотности (её и измерил школьник):

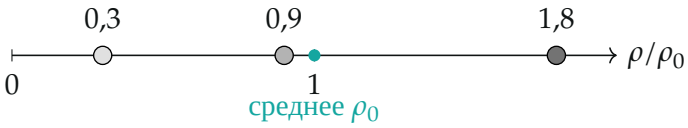
$$\rho_0 = \frac{M}{V} = \frac{10m}{3v} = \frac{10}{3} \cdot \frac{m}{v} = \frac{10}{3}\rho.$$

Здесь $\dfrac{m}{v} = \rho$ — плотность самой лёгкой части.

3. Плотность лёгкой части.

$$\rho = \frac{3}{10}\rho_0 = 0{,}3\,\rho_0.$$

Остальные части в 3 и 6 раз плотнее: $0{,}9\,\rho_0$ и $1{,}8\,\rho_0$.

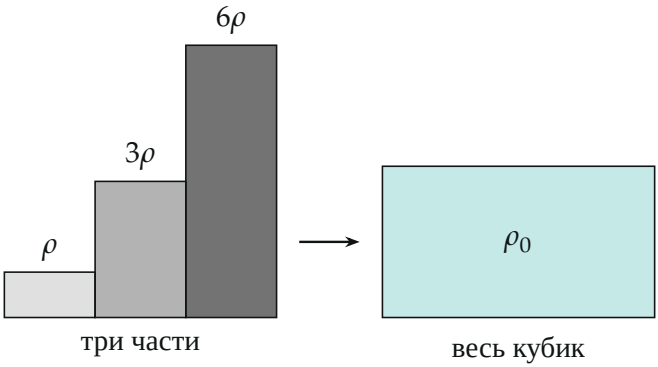


Плотности частей в долях ρ_0: при равных объёмах средняя плотность ρ_0 — среднее арифметическое $(0{,}3 + 0{,}9 + 1{,}8)/3 = 1$

Обратите внимание: у частей одинаковые *объёмы*, поэтому их плотности относятся так же, как массы, $1 : 3 : 6$, а средняя плотность — просто среднее арифметическое трёх плотностей. Если бы одинаковыми были массы, среднее считалось бы иначе.

4. Второй способ — через среднее арифметическое. Плотности частей ρ, 3ρ, 6ρ, объёмы равные, поэтому

$$\rho_0 = \frac{\rho v + 3\rho v + 6\rho v}{3v} = \frac{\rho + 3\rho + 6\rho}{3} = \frac{10}{3}\rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3}{10}\rho_0.$$



Высота столбика — плотность, ширина — объём: площадь (масса) трёх столбиков равна площади прямоугольника высотой ρ_0 и шириной $3v$

Проверка. Размерность: ρ выражена через ρ_0 безразмерным множителем. Проверка числами: пусть $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $v = 1$ дм^3; плотности частей 300, 900, 1800 кг/м^3, массы 0,3, 0,9, 1,8 кг — отношение $1 : 3 : 6$, всего 3,0 кг на 3 дм^3, то есть 1000 кг/м^3 $= \rho_0$. Знак: лёгкая часть легче среднего, $\rho < \rho_0$, как и должно быть.

Смысл: средняя плотность — полная масса на полный объём; при равных объёмах частей это среднее арифметическое их плотностей.

Ответ. $\rho = \dfrac{3}{10}\rho_0 = 0{,}3\,\rho_0$.