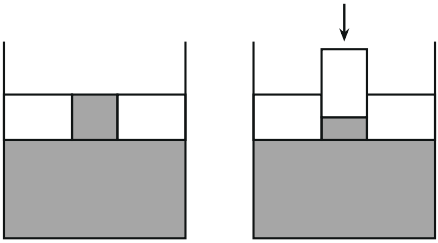
Поршень с отверстием и пробка

Задача 4. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 7 класс, задача 4] На поверхности воды в высоком цилиндрическом стакане лежит поршень толщиной $d = 3$ см с цилиндрическим отверстием. Площадь поперечного сечения стакана $S_1 = 20$ см^2. Площадь сечения отверстия — $S_2 = 5$ см^2. В равновесии вода доходит до верхнего края отверстия (см. левый рисунок). В отверстие вставляют пробку, диаметр которой совпадает с диаметром отверстия, и начинают нажимать на нее пальцем (см. правый рисунок). Насколько переместится пробка, когда дойдет до нижнего края поршня? Зазоры между поршнем и стенками стакана и между пробкой и стенками отверстия воду не пропускают.

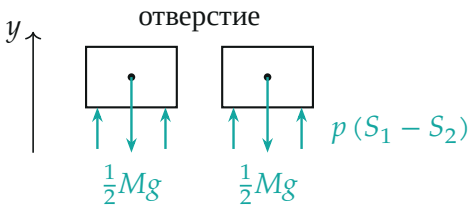


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику и сохранение объёма жидкости. Вода практически несжимаема, и её объём под поршнем вместе с водой в отверстии не меняется. Пробка выдавливает воду из отверстия; уйти этой воде некуда, кроме как под поршень, — поэтому поршень всплывает. Главная идея: перемещение пробки складывается из её хода относительно поршня (это толщина поршня d) и движения самого поршня, которое находим из сохранения объёма воды.

Обозначения. δ — на сколько поднимется поршень; Δx — на сколько опустится пробка относительно стакана; ось y — вертикально вверх, отсчёт от дна стакана; H — высота воды под поршнем вначале.

1. Может ли поршень подниматься. Поршень свободно лежит на воде. Второй закон Ньютона для поршня в проекции на ось y (он движется медленно, ускорение пренебрежимо): вес поршня уравновешен разностью давлений воды снизу и воздуха сверху на кольцо площадью

$S_1 - S_2$. Пробка с поршнем не связана (между ними только водонепроницаемый зазор), поэтому её давление пальцем на поршень не передаётся. Значит, давление под поршнем остаётся тем же, что вначале, и поршень ничем не прижат — вода, выдавленная из отверстия, свободно поднимает его.

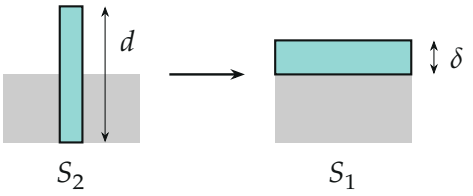


Силы на поршень: тяжесть Mg (поровну на две половины кольца) и давление воды снизу на кольцо площадью $S_1 - S_2$; давление p под поршнем задаёт только его вес, поэтому не меняется

2. Сохранение объёма воды. Сравним объём воды в начале и в конце. Вначале вода занимает слой высотой H под поршнем (площадь S_1) и столбик высотой d в отверстии (площадь S_2). В конце пробка дошла до нижнего края поршня, в отверстии воды нет, а поршень поднялся на δ, и слой под ним стал высотой $H + \delta$:

$$S_1 H + S_2 d = S_1 (H + \delta) \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{S_2}{S_1} d = \frac{5}{20} \cdot 3 \text{ см} = 0{,}75 \text{ см}.$$

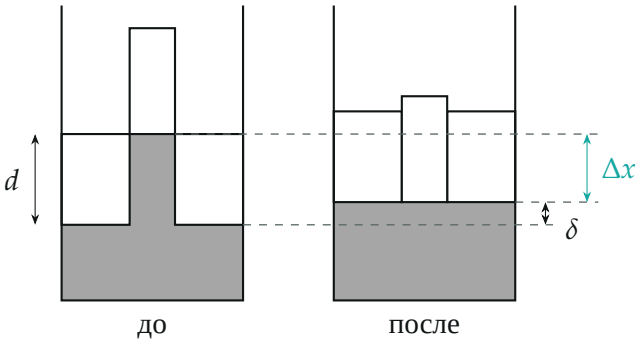
Знак: $\delta > 0$ — поршень поднимается.



Столбик воды из отверстия (сечение S_2, высота d) растекается слоем по всему сечению стакана S_1: $S_1 \delta = S_2 d$

3. Перемещение пробки. Сначала нижний торец пробки стоит у верхнего края отверстия, то есть на высоте верхней грани поршня. В конце он на уровне нижней грани поршня. Относительно поршня торец прошёл вниз всю толщину d, а поршень за это время сам поднялся на δ. Относительно стакана пробка опустилась на

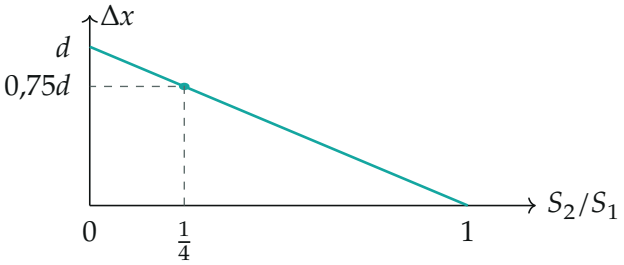
$$\Delta x = d - \delta = d - \frac{S_2}{S_1}\,d = \frac{S_1 - S_2}{S_1}\,d = \frac{15}{20}\cdot 3\text{ см} = 2{,}25\text{ см}.$$



Начальное и конечное положения: торец пробки опустился с уровня верха поршня на уровень его низа, но поршень поднялся на δ

Обратите внимание: «насколько переместится пробка» — это перемещение относительно стакана (Земли), а не относительно поршня. Относительно поршня пробка всегда проходит ровно $d = 3$ см, ответ меньше на подъём поршня.

Проверка. Размерность: $\Delta x = \frac{S_1 - S_2}{S_1}\,d$ — длина. Пределы: при $S_2 \to 0$ из отверстия почти ничего не выдавливается, поршень стоит, и $\Delta x \to d$; при $S_2 \to S_1$ «поршень» исчезает, пробка закрывает весь стакан и сдвинуться не может, $\Delta x \to 0$. Второй способ: выдавленный пробкой объём $S_2\Delta x$ (пробка опустилась на Δx относительно стакана) уходит на подъём кольца поршня площадью $S_1 - S_2$ на $d - \Delta x$: $S_2\Delta x = (S_1 - S_2)(d - \Delta x)$, откуда снова $\Delta x = \frac{S_1 - S_2}{S_1}\,d$.



Ход пробки в зависимости от доли отверстия: $\Delta x = d(1 - S_2/S_1)$; точка — условие задачи

Смысл: пробка «отдаёт» поршню четверть своего хода — ровно ту долю сечения, которую занимает отверстие.

Ответ. $\Delta x = \dfrac{S_1 - S_2}{S_1}\, d = 2{,}25$ см (вниз; поршень при этом поднимается на 0,75 см).