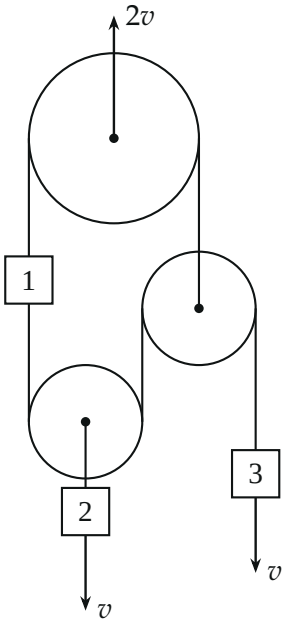
Три блока и три груза

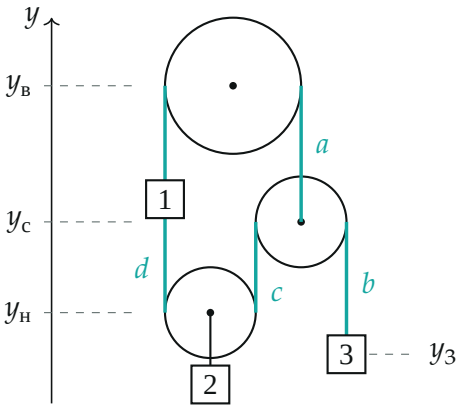
Задача 5. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 7 класс, задача 5] В системе из трех блоков и трех грузов известны скорости верхнего блока и двух грузов (показаны на рисунке). Найти величину и направление скорости оставшегося груза (с номером 1).



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематические связи: блоки и грузы соединены одной нерастяжимой нитью, и скорости тел связаны условием «длина нити не меняется». Один неизвестный блок — средний (правый) — двигается так, чтобы суммарная длина всех участков нити осталась прежней. Найдём его скорость, а затем скорость груза 1, который просто «вшит» в нить.

Обозначения. Ось y — вертикально вверх. $y_в$, $y_с$, $y_н$ — координаты осей верхнего, среднего и нижнего блоков; y_1, y_3 — координаты грузов 1 и 3. Груз 2 висит на оси нижнего блока, поэтому скорость нижнего блока равна скорости груза 2. Скорости в проекции на ось y: $v_в = 2v$, $v_н = -v$, $v_3 = -v$; неизвестные — $v_с$ и v_1.

1. Как идёт нить. Проследим нить от одного конца до другого. Она привязана к оси среднего блока, поднимается к верхнему блоку (участок a), огибает его и спускается слева через груз 1 к нижнему блоку (участок d), огибает нижний блок снизу, поднимается к среднему блоку (участок c), огибает его и спускается к грузу 3 (участок b).



Четыре вертикальных участка нити (бирюзой) и координаты осей блоков и груза 3

2. Длина нити через координаты. Все участки вертикальны, длина каждого — разность координат его концов (дуги на блоках не меняются, их не учитываем):

$$a = y_в - y_с, \quad b = y_с - y_3, \quad c = y_с - y_н, \quad d = y_в - y_н.$$

Нить нерастяжима, поэтому сумма постоянна:

$$a + b + c + d = 2y_в + y_с - y_3 - 2y_н = \text{const}.$$

Каждая координата меняется со скоростью тела, значит, за время Δt изменения складываются в ноль:

$$2v_в + v_с - v_3 - 2v_н = 0 \quad \Rightarrow \quad v_с = -2v_в + v_3 + 2v_н = -4v - v - 2v = -7v.$$

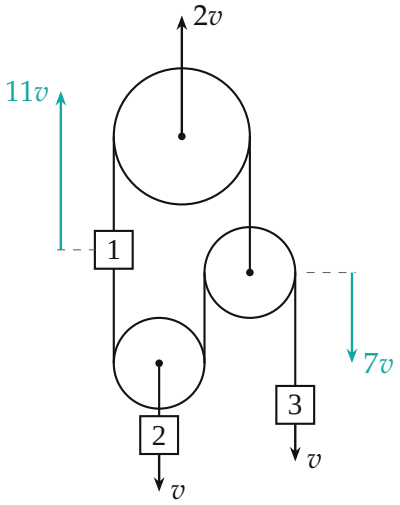
Знак минус: средний блок опускается со скоростью $7v$. Это и есть «освобождение» нити: верхний блок поднимается, грузы 2 и 3 опускаются, и

все три движения требуют дополнительной нити, а взять её неоткуда, кроме как опустив средний блок.

3. Скорость груза 1. Груз 1 — часть нити. Отсчитаем длину нити от её конца на оси среднего блока до груза 1: это участок a и верхний кусок участка d длиной $y_в - y_1$. Эта длина тоже постоянна:

$$(y_в - y_с) + (y_в - y_1) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_в - v_с = 4v + 7v = 11v.$$

Знак плюс: груз 1 поднимается.



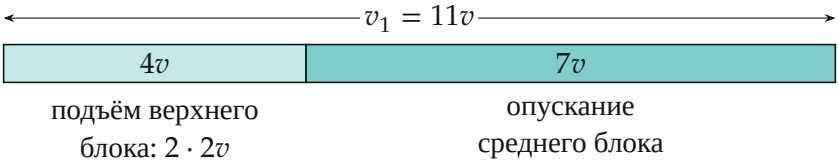
Скорости всех тел: данные — чёрным, найденные — бирюзой

4. Второй способ — считаем удлинения участков. За малое время Δt верхний блок поднялся на $2v\Delta t$, нижний блок и груз 3 опустились на $v\Delta t$, средний опустился на неизвестное Δx. Удлинения участков: d — на $2v\Delta t + v\Delta t$; a — на $2v\Delta t + \Delta x$; c — на $v\Delta t - \Delta x$; b — на $v\Delta t - \Delta x$ (груз 3 ушёл вниз на $v\Delta t$, а блок над ним — на Δx). Сумма удлинений нерастяжимой нити равна нулю:

$$3v\Delta t + (2v\Delta t + \Delta x) + 2(v\Delta t - \Delta x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 7v\Delta t.$$

Груз 1 поднимается за счёт двух причин: опускание среднего блока вытягивает через верхний блок $7v\Delta t$ нити, и подъём верхнего блока на $2v\Delta t$

добавляет по $2v\Delta t$ слева и справа от него. Всего $11v\Delta t$ — то же, что в шаге 3.



Из чего складывается скорость груза 1

Обратите внимание: груз 1 висит не на блоке, а в самой нити, поэтому его скорость — это скорость нити на участке d, а не скорость какого-либо блока.

Проверка. Размерность: все слагаемые — скорости. Частный случай: если бы верхний блок стоял ($v_в = 0$), груз 1 шёл бы вверх со скоростью, с которой опускается средний блок, $v_1 = -v_с$ — так и есть по формуле $v_1 = 2v_в - v_с$. Согласованность: снизу груз 1 связан с нижним блоком куском участка d длиной $y_1 - y_н$; с учётом $v_1 = 11v$ и $v_н = -v$ этот кусок удлиняется со скоростью $12v$, а верхний кусок $y_в - y_1$ укорачивается со скоростью $11v - 2v = 9v$: весь участок d удлиняется со скоростью $3v$ — как и должно быть, $v_в - v_н = 3v$.

Смысл: малые скорости «на входе» дают большую скорость груза 1, потому что все требования лишней нити собираются в одном месте — на опускании среднего блока, — а затем ещё и удваиваются верхним блоком.

Ответ. $v_1 = 11v$, груз 1 движется вверх.