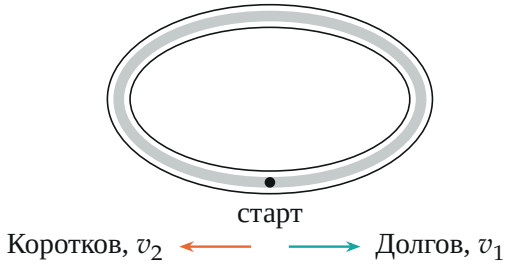
Два бегуна на стадионе

Задача 2. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 8 класс, задача 2] Долгов и Коротков бегают по гаревой дорожке стадиона. Если они побегут из одной точки в противоположные стороны, они встретятся через время $t_1 = 24$ с. За какое время Долгов обгонит Короткова на круг, если они стартуют из одной точки и побегут в одну сторону. На прохождение одного круга Короткову требуется время $t_2 = 52$ с.



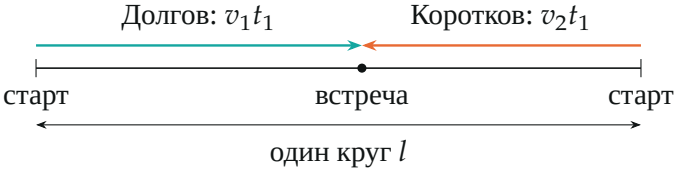
Поясняющий рисунок: дорожка стадиона, бегуны стартуют из одной точки

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительное движение по замкнутой дорожке. При беге навстречу бегуны встречаются, когда вместе пробегут один круг; при беге в одну сторону быстрый обгоняет медленного на круг, когда пробежит на целый круг больше. Удобно перейти в систему отсчёта Короткова: в ней скорость Долгова равна $v_1 + v_2$ при беге навстречу и $v_1 - v_2$ при беге в одну сторону, а путь до встречи — один круг.

Обозначения. l — длина круга; v_1, v_2 — скорости Долгова и Короткова; t_3 — искомое время.

1. Бег навстречу. За время t_1 Долгов пробегает $v_1 t_1$, Коротков — $v_2 t_1$, вместе — весь круг (относительная скорость $v_1 + v_2$, относительный путь l):

$$(v_1 + v_2)\, t_1 = l \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 + v_2}{l} = \frac{1}{t_1}.$$



Дорожка, «развёрнутая» в отрезок: при беге навстречу пути бегунов вместе составляют круг

2. Скорость Короткова. Один круг Коротков пробегает за t_2: $v_2t_2 = l$, то есть $\dfrac{v_2}{l} = \dfrac{1}{t_2}$. Вычтем из результата шага 1:

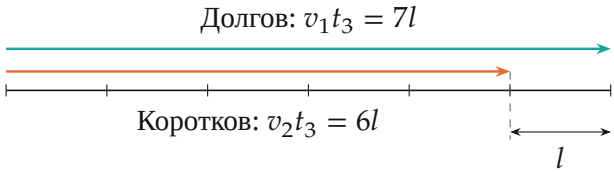
$$\frac{v_1}{l} = \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}.$$

Числа: $\dfrac{v_1}{l} = \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{52} = \dfrac{13-6}{312} = \dfrac{7}{312}$ круга в секунду, $\dfrac{v_2}{l} = \dfrac{6}{312}$. Долгов действительно быстрее: $v_1 : v_2 = 7 : 6$.

3. Бег в одну сторону. Теперь относительная скорость Долгова $v_1 - v_2$, и он обгоняет Короткова на круг, когда пробежит на l больше:

$$(v_1 - v_2)\,t_3 = l \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t_3} = \frac{v_1}{l} - \frac{v_2}{l} = \frac{1}{t_1} - \frac{2}{t_2} = \frac{t_2 - 2t_1}{t_1 t_2},$$

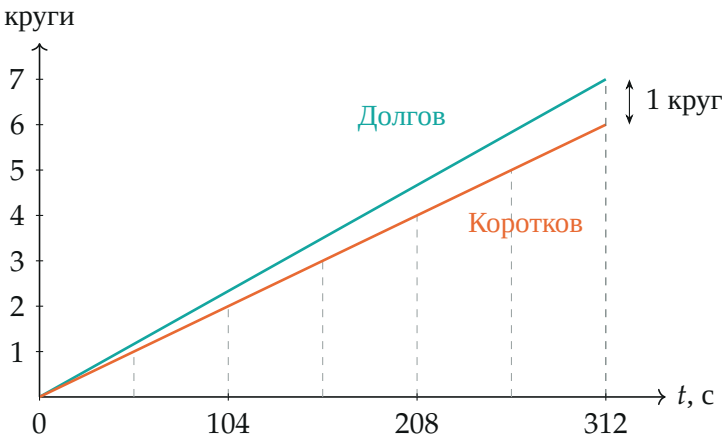
$$t_3 = \frac{t_1 t_2}{t_2 - 2t_1} = \frac{24 \cdot 52}{52 - 48}\ \text{с} = 312\ \text{с}.$$



Бег в одну сторону: за t_3 Долгов пробегает 7 кругов, Коротков — 6; разница — один круг (засечки — круги Короткова)

Обратите внимание: ответ существует только при $t_2 > 2t_1$ (здесь $52 > 48$). Если бы $t_2 < 2t_1$, то $v_1 < v_2$, и обгонял бы не Долгов, а Коротков.

Числа подобраны так, что скорости отличаются всего на $1/7$, поэтому обгон занимает много времени — в 13 раз больше, чем встреча.



Число пройденных кругов от времени: прямые расходятся на один круг при $t_3 = 312$ *с*

Проверка. Размерность: $\dfrac{t_1 t_2}{t_2 - 2t_1}$ — время. Числа: за 312 с Долгов пробегает $\frac{7}{312} \cdot 312 = 7$ кругов, Коротков — $\frac{312}{52} = 6$ кругов, разница ровно круг. Встреча при беге навстречу: $(7 + 6)/312 \cdot 24 = 1$ круг — сходится. Предел: если бы скорости были равны ($t_2 = 2t_1$), обгона не было бы никогда — формула даёт $t_3 \to \infty$.

Смысл: при встрече скорости складываются, при обгоне вычитаются; разность близких скоростей мала, поэтому обгон на круг идёт в 13 раз дольше встречи.

Ответ. $t_3 = \dfrac{t_1 t_2}{t_2 - 2t_1} = 312$ с.