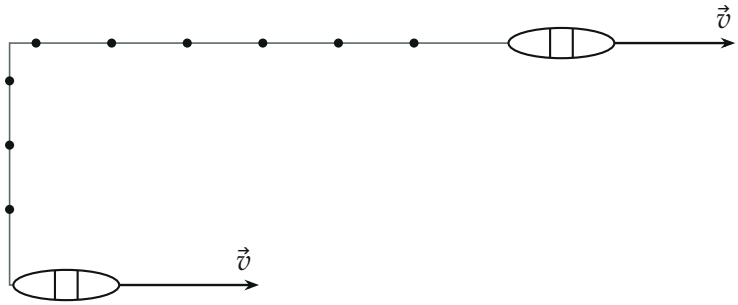
Лодки тянут сеть

Задача 3. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 8 класс, задача 3] Две лодки, плывущие параллельно друг другу с одинаковыми скоростями $v = 2$ м/с, тянут концы натянутой сети. Передний конец сети опережает задний по курсу движения на $l = 40$ м, а расстояние между лодками поперек курса — $2l/3$. При какой наименьшей скорости рыба сможет уплыть от сети, где бы она перед ней не оказалась?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительное движение: сеть, натянутая между лодками, едет вместе с ними со скоростью $\vec{v}$. По рисунку сеть изогнута углом: длинная часть идёт вдоль курса, короткая — поперёк курса. Сеть «загребает» рыбу только той частью, которая движется *поперёк самой себе*. Главная идея: перейти в систему отсчёта сети и найти самое опасное место — перед участком, который движется перпендикулярно самому себе.

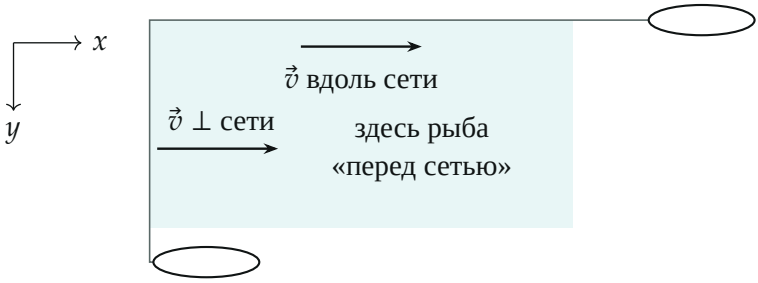
Обозначения. $\vec{u}$ — скорость рыбы относительно воды; $\vec{v}$ — скорость сети (и лодок) относительно воды; ось x — по курсу лодок, ось y — поперёк курса, к задней лодке; $\vec{u}_{\text{отн}}$ — скорость рыбы относительно сети.

1. Как движется каждая часть сети. Сеть натянута и движется поступательно вместе с лодками: каждая её точка имеет скорость $\vec{v}$ вдоль оси x. Разложим $\vec{v}$ на составляющую вдоль участка сети и перпендикулярную ему:

- участок вдоль курса: $\vec{v}$ направлена вдоль него, перпендикулярная составляющая равна нулю — участок скользит сам по себе и никого не догоняет;

- участок поперёк курса: $\vec{v}$ перпендикулярна ему целиком — он надвигается на воду перед собой со скоростью v.

Значит, самая опасная для рыбы точка — прямо перед поперечным участком: на неё сеть «наезжает» с наибольшей скоростью v.

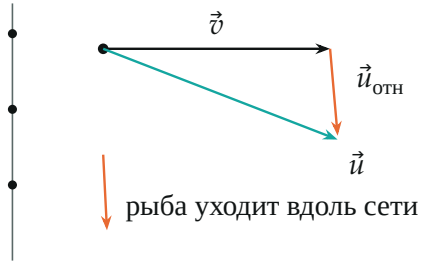


Продольный участок скользит вдоль себя, поперечный надвигается на воду со скоростью v

2. Условие, чтобы не догнали. Пусть рыба стоит перед поперечным участком. Перейдём в систему отсчёта сети: по закону сложения скоростей

$$\vec{u}_{\text{отн}} = \vec{u} - \vec{v}.$$

Чтобы сеть рыбу не догнала, проекция относительной скорости на ось x (от сети) должна быть неотрицательной: $u_x - v \geq 0$, то есть $u_x \geq v$. А чтобы рыба ушла от сети совсем, ей нужно ещё смещаться вдоль поперечного участка к его концу у задней лодки и обогнуть его: $u_y > 0$. Выход вверх закрыт — там продольный участок сети.



Рыба перед поперечным участком: u_x чуть больше v, малая составляющая u_y уносит её к краю сети

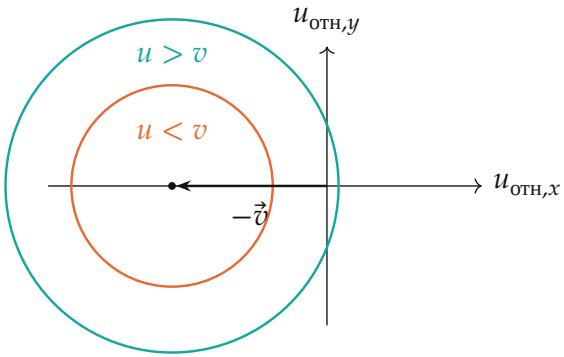
3. Наименьшая скорость. При $u_x \geq v$ и $u_y > 0$ модуль скорости

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} > v.$$

И наоборот, если $u > v$ хотя бы на малую величину, рыба может взять $u_x = v$ и $u_y = \sqrt{u^2 - v^2} > 0$: сеть её не догоняет, а за время $\dfrac{2l/3}{u_y}$ рыба доплывает до конца поперечного участка и уходит. Если же $u \leq v$, то $u_x \leq u \leq v$, и при любом направлении сеть надвигается на рыбу (или в лучшем случае при $u = v$ рыба вечно плывёт прямо перед ней, никуда не уходя). Поэтому

$$u_{\min} = v = 2 \text{ м/с}$$

(скорость рыбы должна быть больше v на сколь угодно малую величину).



Все возможные скорости рыбы относительно сети — окружность радиуса u с центром в конце $-\vec{v}$. При $u < v$ она целиком левее оси: сеть догоняет при любом направлении. При $u > v$ есть скорости с $u_{отн,x} > 0$

Обратите внимание: длины l и $2l/3$ на ответ не влияют — они определяют только, как долго рыба будет выбираться. Решает то, что у сети есть участок, движущийся перпендикулярно себе. Будь сеть натянута по прямой между лодками, её участок двигался бы к себе под углом, и хватило бы меньшей скорости $v \sin \alpha$.

Проверка. Размерность: ответ — скорость. Предельный случай: в любом другом месте перед сетью рыбе ещё проще — перед продольным

участком сеть на неё вообще не надвигается. Так что v — требование именно самой опасной точки, и его хватает для любой точки.

Смысл: от сети уплывает тот, кто быстрее самого «наступающего» её участка; здесь участок поперёк курса наступает со скоростью лодок.

Ответ. $u_{\min} = v = 2$ м/с (скорость рыбы должна хоть немного превышать скорость лодок).