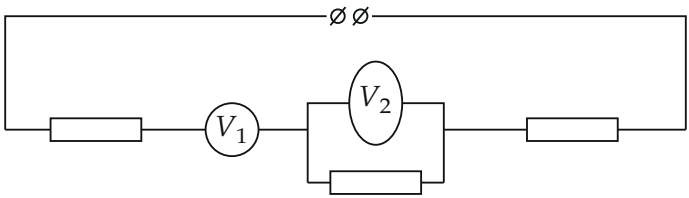
Два вольтметра и три резистора

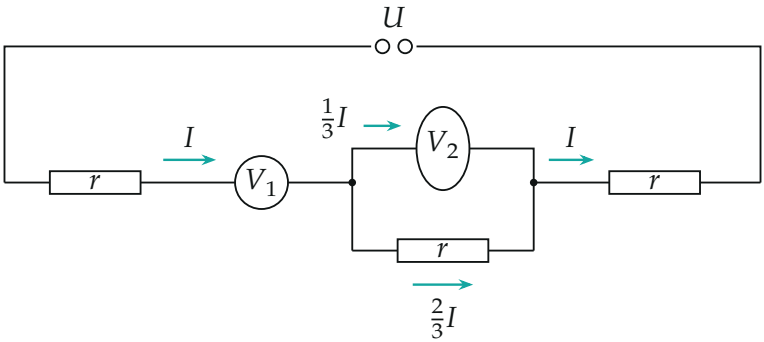
Задача 1. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 9 класс, задача 1] Электрическую цепь собрали из двух одинаковых вольтметров и трех одинаковых резисторов. К цепи подключили источник постоянного напряжения. Известно, что показания вольтметра V_1 отличаются от показания вольтметра V_2 в три раза, при этом вольтметр V_1 показал напряжение $U_1 = 12$ В. Найти напряжение источника.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на смешанное соединение, в котором вольтметры — не идеальные: у каждого конечное сопротивление R, и через вольтметр течёт ток. Вольтметр показывает напряжение на самом себе, то есть IR для своего тока I. Главная идея: вольтметры одинаковые, поэтому отношение их показаний — это отношение токов через них. Зная, как делится ток в узле, найдём, во сколько раз сопротивление вольтметра больше сопротивления резистора, а затем сложим напряжения на последовательных участках.

Обозначения. r — сопротивление резистора; R — сопротивление вольтметра; I — ток через V_1; I_2 и I_r — токи через V_2 и через средний резистор; U_2 — показание V_2; U — напряжение источника.

1. Какой вольтметр показывает больше. Цепь — один последовательный путь: левый резистор, V_1, участок «V_2 параллельно среднему резистору», правый резистор. Весь ток I проходит через V_1, а в узле перед V_2 делится на две части, так что $I_2 < I$. Показания $U_1 = IR$ и $U_2 = I_2R$, значит $U_2 < U_1$, и условие «в три раза» означает $U_1 = 3U_2$, $U_2 = 4$ В.



Токи: весь ток I идёт через V_1 и через крайние резисторы, а в параллельном участке делится 1 : 2

2. Сопротивление вольтметра. Показание V_2 втрое меньше, значит и ток через него втрое меньше: $I_2 = I/3$. Запишем первое правило Кирхгофа (закон сохранения заряда) для узла перед параллельным участком: $I = I_2 + I_r$, откуда $I_r = \frac{2}{3}I = 2I_2$. Вольтметр V_2 и средний резистор подключены к одним и тем же узлам, напряжение на них одно и то же, U_2. По закону Ома $U_2 = I_2R = I_r r = 2I_2 r$, поэтому

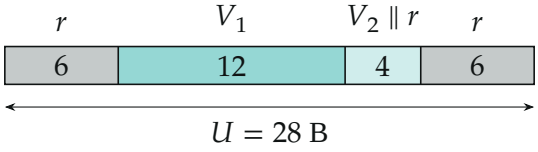
$$R = 2r.$$

3. Напряжения на участках. Через левый и правый резисторы течёт весь ток I, тот же, что через V_1. Сопротивление каждого вдвое меньше, чем у вольтметра, поэтому и напряжение на каждом вдвое меньше:

$$U_r = Ir = \frac{IR}{2} = \frac{U_1}{2} = 6\ \text{В}.$$

Напряжение источника — сумма напряжений последовательных участков:

$$U = U_r + U_1 + U_2 + U_r = \frac{U_1}{2} + U_1 + \frac{U_1}{3} + \frac{U_1}{2} = \frac{7}{3}U_1 = \frac{7}{3}\cdot 12\ \text{В} = 28\ \text{В}.$$



Напряжения на последовательных участках, в вольтах: длина отрезка пропорциональна напряжению

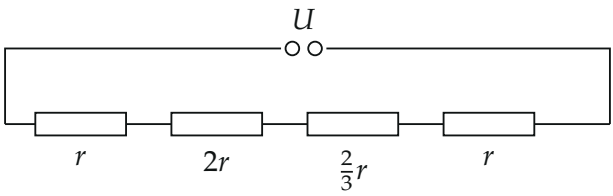
Обратите внимание: вольтметр здесь — обычный резистор с сопротивлением R, просто он ещё и показывает своё напряжение. Если считать вольтметры идеальными ($R \to \infty$), ток через V_1 был бы нулевым, и цепь вообще бы не работала — поэтому без конечного R задачу не решить.

4. Второй способ — через эквивалентное сопротивление. Заменим каждый элемент сопротивлением: r, $V_1 \to 2r$, параллельный участок $\dfrac{2r \cdot r}{2r + r} = \dfrac{2}{3}r$, r. Полное сопротивление цепи

$$R_{\text{общ}} = r + 2r + \frac{2}{3}r + r = \frac{14}{3}r.$$

Ток $I = U/R_{\text{общ}}$ одинаков на всех последовательных участках, поэтому напряжения делятся пропорционально сопротивлениям:

$$\frac{U}{U_1} = \frac{14r/3}{2r} = \frac{7}{3}, \qquad U = \frac{7}{3} \cdot 12 \text{ В} = 28 \text{ В}.$$



Эквивалентная схема: вольтметр V_1 — сопротивление $2r$, параллельный участок — $\frac{2}{3}r$

Проверка. Размерность: сумма напряжений — напряжение. Ток в узле сходится: $\frac{1}{3}I + \frac{2}{3}I = I$. Напряжение на параллельном участке через сопротивление: $I \cdot \frac{2}{3}r = \frac{1}{3}I \cdot 2r = \frac{1}{3}U_1 = 4$ В — то же, что показание V_2. Предел: если бы сопротивление вольтметров было много больше r, почти весь ток шёл бы в обход V_2 через резистор, и V_2 показывал бы почти ноль, а не треть от V_1 — отношение показаний 3 как раз и задаёт $R = 2r$.

Смысл: показания одинаковых вольтметров — это токи через них, поэтому по их отношению видно, как делится ток, а значит, и каковы сопротивления.

Ответ. $U = \dfrac{7}{3}U_1 = 28$ В.