Неоднородный брусок

Задача 3. [Росатом 2018/19, заключительный этап, 9 класс, задача 3] Имеется неоднородный брусок в форме прямоугольного параллелепипеда, плотность которого уменьшается с высотой. Опущенный в воду, брусок плавает, погрузившись в воде на $2/3$ объема. Если разрезать брусок пополам и опустить в воду более легкую половину, она будет плавать, погрузившись наполовину. Будет ли плавать нижняя половина? Если да, то найти минимальную силу, которую нужно приложить нижней половине бруска, чтобы утопить ее. Если нет, то найти минимальную силу, которую нужно приложить к нижней половине бруска, чтобы оторвать ее от дна. Масса бруска m.

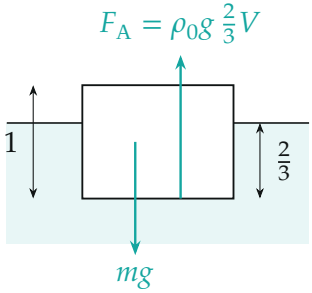


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на плавание тел: тело плавает, пока его средняя плотность меньше плотности воды, а погружённая доля объёма равна отношению средней плотности тела к плотности воды. Брусок неоднородный, но для плавания важна только *средняя* плотность. Главная идея: из двух опытов узнаём среднюю плотность всего бруска и его верхней половины, а среднюю плотность нижней половины получаем как «остаток»; дальше — второй закон Ньютона для нижней половины, полностью погружённой в воду.

Обозначения. V — объём бруска; ρ — средняя плотность бруска; ρ_1, ρ_2 — средние плотности верхней (лёгкой) и нижней половин; ρ_0 — плотность воды; m_1, m_2 — массы половин; F — искомая сила.

1. Средняя плотность бруска. Брусок плавает в равновесии. Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на вертикальную ось: сила тяжести уравновешена силой Архимеда, действующей на погружённые $2/3$ объёма:

$$\rho g V = \rho_0 g \cdot \frac{2}{3} V \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{2}{3}\rho_0, \qquad m = \rho V = \frac{2}{3}\rho_0 V.$$



Целый брусок: погружено $2/3$ объёма, $mg = F_A$

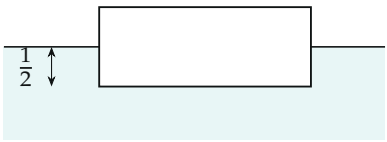
2. Средняя плотность верхней половины. Плотность бруска уменьшается с высотой, поэтому лёгкая половина — верхняя. Брусок разрезают пополам, так что объём каждой половины $V/2$. Верхняя половина плавает, погрузившись наполовину; тот же закон для неё:

$$\rho_1 g \frac{V}{2} = \rho_0 g \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{1}{2}\rho_0.$$

3. Средняя плотность нижней половины. Масса бруска — сумма масс половин: $\rho V = \rho_1 \frac{V}{2} + \rho_2 \frac{V}{2}$, то есть средняя плотность бруска — среднее арифметическое плотностей половин (объёмы половин равны):

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = 2\rho - \rho_1 = \frac{4}{3}\rho_0 - \frac{1}{2}\rho_0 = \frac{5}{6}\rho_0 < \rho_0.$$

Средняя плотность нижней половины меньше плотности воды — **нижняя половина плавает**, погрузившись на $5/6$ своего объёма.



верхняя
$\rho_1 = \frac{1}{2}\rho_0$



нижняя
$\rho_2 = \frac{5}{6}\rho_0$

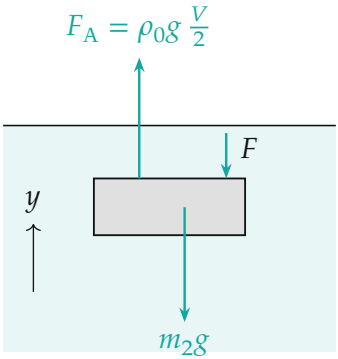
Половины бруска на воде: верхняя погружена на $1/2$, нижняя — на $5/6$ своего объёма

4. Сила, чтобы утопить нижнюю половину. Утопить — погрузить целиком. Чем глубже тело, тем больше сила Архимеда, поэтому нужная сила наибольшая в конце, когда половина ушла под воду полностью; её и надо уметь приложить. Минимальная сила направлена вертикально вниз (иначе часть силы тратится впустую). Запишем второй закон Ньютона для нижней половины, полностью погружённой и покоящейся, в проекции на ось y вверх:

$$F_A - m_2 g - F = 0, \qquad F = \rho_0 g \frac{V}{2} - \rho_2 g \frac{V}{2} = \left(1 - \frac{5}{6}\right)\rho_0 g \frac{V}{2} = \frac{1}{12}\rho_0 g V.$$

Выразим через массу бруска: $\rho_0 V = \frac{3}{2} m$ (шаг 1), значит

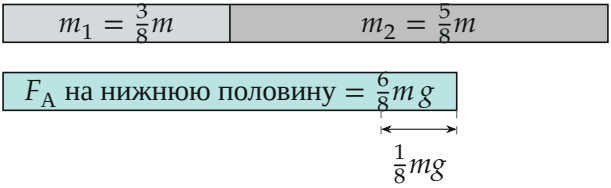
$$F = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{2} mg = \frac{1}{8} mg.$$



Нижняя половина целиком под водой: $F = F_A - m_2 g$

5. Второй способ — через массы. Масса верхней половины: $m_1 g = \rho_0 g \cdot \frac{V}{4}$, то есть $m_1 = \frac{\rho_0 V}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} m = \frac{3}{8} m$. Масса нижней $m_2 = m - m_1 = \frac{5}{8} m$. Сила Архимеда на полностью погружённую нижнюю половину $\rho_0 g \frac{V}{2} = \frac{3}{4} mg$. Тогда

$$F = \frac{3}{4} mg - \frac{5}{8} mg = \frac{1}{8} mg.$$



Массы в восьмых долях m: сила Архимеда на погружённую нижнюю половину $\frac{6}{8}mg$ больше её веса $\frac{5}{8}mg$ на $\frac{1}{8}mg$

Обратите внимание: «плавает или тонет» решает средняя плотность, а не то, что внизу половины вещество плотнее: распределение плотности внутри половины влияет только на то, как она повернётся на воде, а не на силу Архимеда при полном погружении.

Проверка. Размерность: mg — сила. Сумма проверяется: $m_1 + m_2 = \frac{3}{8}m + \frac{5}{8}m = m$; сила Архимеда на целый брусок, погружённый полностью, $\rho_0 g V = \frac{3}{2}mg$, а на две половины — $\frac{3}{4}mg + \frac{3}{4}mg$ — то же. Знак: $F > 0$ — давить нужно вниз, как и положено для плавающего тела. Предел: если бы брусок был однородным ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), верхняя половина погружалась бы тоже на $2/3$, а не на $1/2$; разница и даёт «перегруз» нижней половины.

Смысл: нижняя половина тяжелее верхней, но всё равно легче воды, и, чтобы её утопить, нужно добавить ей недостающие до плотности воды $\frac{1}{6}$ — это $\frac{1}{8}$ веса всего бруска.

Ответ. Нижняя половина будет плавать (её средняя плотность $5\rho_0/6$); чтобы утопить её, нужна сила $F = \dfrac{1}{8}mg$, направленная вертикально вниз.