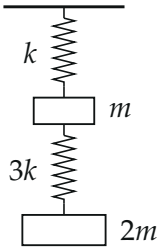
Грузы на двух пружинах поменяли местами

Задача 1. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 10 класс, задача 1] К телу массой m прикрепили пружину с жесткостью k, второй конец которой прикрепили к потолку. К телу прикрепили еще одну пружину с жесткостью $3k$, к ней подвесили тело массой $2m$. Нижнее тело опустилось на величину ΔL по сравнению со случаем не деформированных пружин. Насколько опустится нижнее тело, если поменять местами и пружины, и тела?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие тел, подвешенных на пружинах (закон Гука плюс второй закон Ньютона для покоящихся тел). Нижнее тело опускается на сумму удлинений обеих пружин, а удлинение каждой пружины определяется тем, какой груз она держит: верхняя держит оба тела, нижняя — только нижнее. После перестановки меняется и то, какие грузы, и то, на каких пружинах они висят.

Обозначения. x_1, x_2 — удлинения верхней и нижней пружины в исходной системе; x_1', x_2' — после перестановки; ось y направлена вверх. Пружины невесомые, поэтому сила упругости вдоль каждой пружины одна и та же на обоих её концах.

1. Нижнее тело $2m$**.** На него действуют сила тяжести $2mg$ вниз и сила упругости нижней пружины $3k\,x_2$ вверх. Второй закон Ньютона в проекции на ось y (тело покоится, ускорение нулевое):

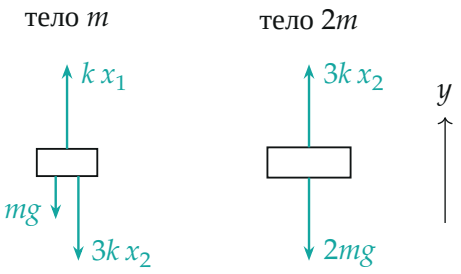
$$3k\,x_2 - 2mg = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{2mg}{3k}.$$

2. Верхнее тело m**.** На него действуют сила тяжести mg вниз, верхняя пружина тянет вверх с силой $k\,x_1$, нижняя растянутая пружина тянет его

вниз с силой $3k\,x_2 = 2mg$. Второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$k\,x_1 - mg - 3k\,x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{mg + 2mg}{k} = \frac{3mg}{k}.$$

Тот же результат сразу: верхняя пружина держит систему «оба тела + нижняя пружина» массой $3m$.



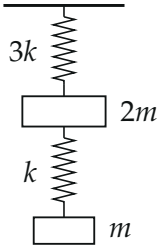
Силы на каждое тело в исходной системе; длины стрелок — примерно по модулю

3. Опускание нижнего тела. Нижнее тело опускается на удлинение верхней пружины (на столько опустилось верхнее тело) плюс удлинение нижней:

$$\Delta L = x_1 + x_2 = \frac{3mg}{k} + \frac{2mg}{3k} = \frac{11\,mg}{3k}.$$

4. После перестановки. Теперь к потолку подвешена пружина $3k$, на ней тело $2m$, под ним пружина k и тело m. Те же рассуждения: нижняя пружина k держит тело m, верхняя пружина $3k$ держит оба тела, $3m$:

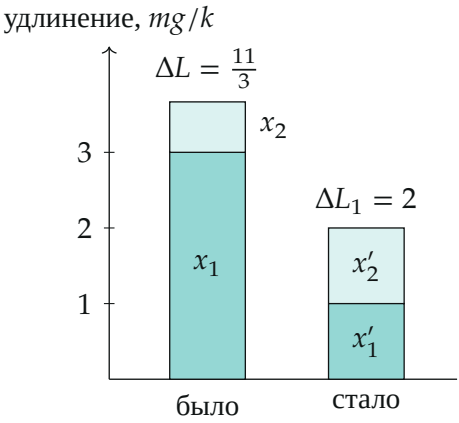
$$k\,x_2' = mg \;\Rightarrow\; x_2' = \frac{mg}{k}, \qquad 3k\,x_1' = 3mg \;\Rightarrow\; x_1' = \frac{mg}{k}.$$



Система после перестановки пружин и тел

5. Новое опускание.

$$\Delta L_1 = x_1' + x_2' = \frac{2mg}{k} = \frac{2mg}{k} \cdot \frac{3k}{11\,mg}\,\Delta L = \frac{6}{11}\,\Delta L.$$



Удлинения верхней (тёмная часть) и нижней (светлая) пружин в единицах mg/k

Обратите внимание. Нижнее тело опускается на сумму удлинений *обеих* пружин, а не только нижней: вместе с верхним телом опускается и точка подвеса нижней пружины.

Проверка. Размерность $[mg/k]$ — метры. Предельный случай: если обе пружины одинаковой жёсткости k и тела одинаковы, перестановка ничего не меняет — по нашим формулам $\Delta L = \Delta L_1 = 3mg/k$, верно.

Знак: после перестановки мягкая пружина держит лишь лёгкое тело, а жёсткая — оба тела, поэтому опускание уменьшилось, $\Delta L_1 < \Delta L$.

Смысл: удлинение пружины — груз, который она держит, делённый на её жёсткость; выгоднее ставить жёсткую пружину туда, где нагрузка больше.

Ответ. $\Delta L_1 = \dfrac{6}{11}\Delta L$.