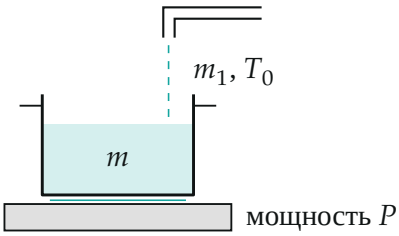
Кастрюля с водопроводной водой

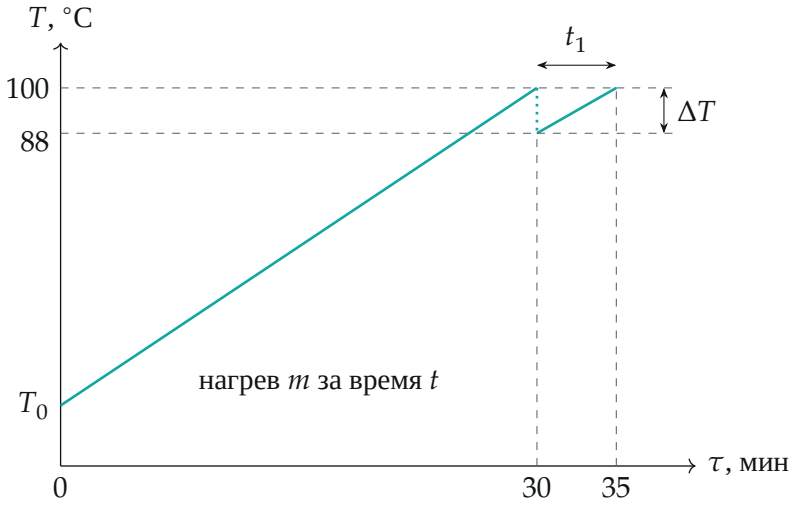
Задача 2. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 10 класс, задача 2] В кастрюлю налили водопроводную воду и поставили кастрюлю на плиту. Через время $t = 30$ мин вода закипела. В кастрюлю долили еще какое-то количество водопроводной воды. Температура воды в кастрюле понизилась при этом на $\Delta T = 12°$. Через время $t_1 = 5$ мин после этого вода снова закипела. Найти температуру водопроводной воды. Потерями тепла пренебречь.



Поясняющий рисунок: вода массой m на плите, из крана доливают воду массой m_1 при температуре T_0

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на тепловой баланс при нагревании постоянной мощностью. Потерь нет, поэтому за время τ плита передаёт воде теплоту $P\tau$, пропорциональную времени. Процесс в три этапа: нагрев воды m от T_0 до кипения (время t), смешивание с холодной водой m_1 (температура падает на ΔT), нагрев всей воды $m + m_1$ на ΔT до кипения (время t_1). Неизвестны P, m, m_1 и T_0, но P и массы сократятся в отношениях.

Обозначения. P — мощность плиты; c — удельная теплоёмкость воды; $T_к = 100°\text{C}$ — температура кипения (нормальное давление); T_0 — температура водопроводной воды; m — начальная масса воды, m_1 — долитая. Испарением воды до момента закипания пренебрегаем.



Температура воды в кастрюле: нагрев до кипения, скачок вниз на ΔT при доливании, нагрев до кипения за t_1. Построено по найденному $T_0 = 16°C$

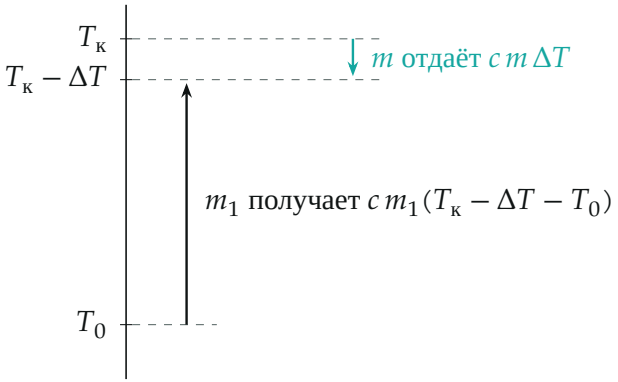
1. Нагрев начальной воды. Уравнение теплового баланса: теплота от плиты за время t идёт на нагрев воды m от T_0 до $T_к$:

$$P\,t = c\,m\,(T_к - T_0). \qquad (1)$$

В уравнение входит только разность температур, поэтому температуры можно брать в градусах Цельсия.

2. Доливание. При смешивании горячая вода m остывает от $T_к$ до $T_к - \Delta T$ и отдаёт теплоту $c\,m\,\Delta T$; холодная вода m_1 нагревается от T_0 до той же температуры $T_к - \Delta T$. Уравнение теплового баланса смешивания:

$$c\,m_1\,(T_к - \Delta T - T_0) = c\,m\,\Delta T \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{m\,\Delta T}{T_к - \Delta T - T_0}. \qquad (2)$$



Баланс при доливании: обе порции приходят к одной температуре $T_к - \Delta T$

3. Нагрев смеси. Вся вода массой $m + m_1$ нагревается на ΔT за время t_1:

$$P\,t_1 = c\,(m + m_1)\,\Delta T. \qquad (3)$$

Из (2) масса смеси

$$m + m_1 = m\,\frac{T_к - \Delta T - T_0 + \Delta T}{T_к - \Delta T - T_0} = m\,\frac{T_к - T_0}{T_к - \Delta T - T_0},$$

и из (3)

$$P\,t_1 = \frac{c\,m\,(T_к - T_0)\,\Delta T}{T_к - \Delta T - T_0}.$$

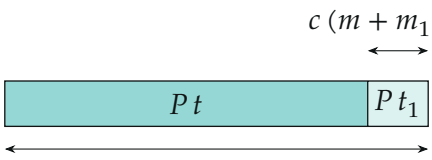
4. Отношение. Делим (1) на последнее равенство — мощность, теплоёмкость и масса сокращаются:

$$\frac{t}{t_1} = \frac{T_к - \Delta T - T_0}{\Delta T} \quad \Rightarrow \quad T_0 = T_к - \frac{t + t_1}{t_1}\,\Delta T = 100 - \frac{35}{5}\cdot 12 = 16^\circ\text{C}.$$

5. Второй способ — баланс всего процесса. Сложим этапы. За всё время $t + t_1$ плита передала $P(t + t_1)$, и в итоге *вся* вода $m + m_1$ нагрета от T_0 до кипения (смешивание внутри кастрюли тепла не добавляет и не забирает):

$$P\,(t + t_1) = c\,(m + m_1)(T_к - T_0).$$

Делим на (3): $\dfrac{t + t_1}{t_1} = \dfrac{T_к - T_0}{\Delta T}$ — то же равенство, без вычисления m_1.



$P(t+t_1) = c\,(m+m_1)(T_к - T_0)$: вся вода от T_0 до кипения

Второй способ: полная теплота от плиты и теплота последнего этапа относятся как $(T_к - T_0)$ к ΔT

Обратите внимание. Доливание не меняет полной энергии воды в кастрюле: холодная вода получила ровно столько, сколько отдала горячая. Поэтому в балансе «за всё время» этап смешивания можно не расписывать.

Проверка. Размерность: $\frac{t+t_1}{t_1}$ безразмерно, T_0 — в градусах. Числа: из (2) $m_1 = m\cdot\frac{12}{72} = m/6$; тогда по (1) и (3) $\frac{t}{t_1} = \frac{c\,m\cdot 84}{c\cdot\frac{7}{6}m\cdot 12} = 6$ — совпадает с $30/5$. Предел: если долить очень мало воды ($\Delta T \to 0$), повторное закипание мгновенно, $t_1 \to 0$, а T_0 остаётся конечным — в формуле $\Delta T/t_1$ стремится к конечному пределу, скорости нагрева $(T_к - T_0)/(t+t_1)$.

Смысл: при постоянной мощности время нагрева пропорционально (масса × разность температур), и отношение двух времён сразу даёт неизвестную температуру.

Ответ. $T_0 = T_к - \dfrac{t+t_1}{t_1}\,\Delta T = 16°\text{C}$.